

# Innovation, commutation et contrôle impulsif en horizon infini

Rim Amami

Institut de Mathématiques de Toulouse  
Université Paul Sabatier, Toulouse  
rim.amami@math.univ-toulouse.fr

February 3, 2012

## Abstract

Nous étudions un problème de contrôle impulsif en horizon infini. Pour le résoudre, nous étendons au cas de l'horizon infini des résultats concernant les équations différentielles stochastiques rétrogrades et réfléchies à double barrière. Les propriétés de l'enveloppe de Snell permettent de réduire notre problème à montrer l'existence d'un couple de processus continus.

**Mots clés:** Contrôle impulsif, horizon infini, équations différentielles stochastiques rétrogrades et réfléchies, double barrière.

**MSC Classification:** 60H15, 35R60, 93E20.

## 1 Introduction

La théorie du contrôle impulsif est associée au problème du choix optimal de temps successifs pour effectuer une action (dans notre cadre l'action est le changement de technologie) afin d'optimiser un critère économique. C'est une situation où l'on fait face à des systèmes dynamiques évoluant dans des conditions d'incertitude et où il s'agit de prendre des décisions à chaque date afin de maximiser une espérance de gain. Ce type de problème se résout entre autres en utilisant l'enveloppe de Snell et le principe de programmation dynamique.

Le problème de contrôle impulsif est un sujet qui apparaît souvent dans la littérature par exemple l'économie, la statistique et les mathématiques financières. Il a été initié par Bensoussan et Lions [1] et ensuite formalisé par d'autres auteurs.

Parmi d'autres, Hamadène et al. [13] ont montré l'existence d'une solution pour les équations différentielles stochastiques rétrogrades réfléchies à double barrière en horizon fini en utilisant les propriétés de l'enveloppe de Snell.

Hdhiri et Karouf [14] ont prouvé l'existence d'une stratégie optimale maximisant le gain de la firme dans un cadre non-markovien en utilisant une fonction d'utilité de type exponentielle et des propriétés de l'enveloppe de Snell.

D'autres auteurs ont utilisé les équations stochastiques différentielles rétrogrades pour leurs modèles. Par exemple, Jeanblanc et Hamadène ont considéré dans [15] une centrale électrique qui a deux modes: arrêt et démarrage. Il s'agit d'un problème de contrôle impulsif avec changement du contrôle sans saut de la variable d'état. Ce problème a été résolu en utilisant principalement l'enveloppe de Snell et les équations différentielles stochastiques réfléchies.

Cvitanic et Karatzas [6] ont établi l'existence et l'unicité des solutions des équations différentielles stochastiques rétrogrades à deux barrières réfléchies. Ces auteurs ont généralisé les travaux de El Karoui et al. [11]. Ils ont aussi montré que la solution des EDS coïncide avec la valeur du jeu de Dynkin, un jeu stochastique d'arrêt optimal.

Djehiche et al. [8] ont utilisé des outils purement probabilistes comme les équations différentielles stochastiques rétrogrades et l'enveloppe de Snell pour résoudre le problème optimal de changement de technologie en horizon fini.

Mnif et al. [9] ont utilisé le principe de programmation dynamique des équations Hamilton-Jacobi-Bellman. Ces auteurs ont fourni un schéma numérique pour les inéquations quasi variationnelles associées aux problèmes de contrôle impulsif.

Vath et Mnif ont prouvé dans [24] que le problème de contrôle impulsif est réduit à une suite itérative des problèmes d'arrêt optimaux. En effet, en utilisant des inégalités variationnelles, la fonction de valeur est obtenue comme la limite d'une suite itérative de ces problèmes d'arrêt optimaux. Ensuite, les auteurs ont résolu le problème d'arrêt numériquement à l'aide de la méthode de Monte Carlo et le calcul de Malliavin.

Bouchard et Chassagneux [2] ont étudié l'approximation en temps discret de la solution d'une équation différentielle stochastique Forward Backward réfléchie dans le cas où la réflexion n'opère que dans un ensemble fini de fois. Les auteurs ont prouvé des propriétés de régularité de la solution de l'EDS sous des hypothèses de Lipschitz. D'autres auteurs ont étudié l'approximation en temps discret des EDS Forward Backward réfléchies, citons parmi d'autres [3, 4, 5].

Les équations différentielles stochastiques rétrogrades (EDSR) ont été initiées par Pardoux et Peng [20, année 1990], [21, année 1992]. Ils ont été les premiers à résoudre le problème de l'existence et l'unicité de la solution des EDSR sous des hypothèses de Lipschitz sur la fonction drift. Plusieurs auteurs ont été attirés par ce domaine notamment dans le cadre des applications numériques, notamment pour améliorer les conditions d'existence et d'unicité d'une solution de l'EDSR. Tous ces travaux ont été basés principalement sur le théorème de comparaison des solutions des EDSR. Parmi d'autres, citons [12, 22, 25].

El Karoui et al. [11] et Hamadène et al. [13] ont étendu ces résultats aux cas des EDS rétrogrades et réfléchies. Néanmoins, leurs résultats ne s'appliquent pas directement à la situation qui nous intéresse qui exige un horizon infini. Ceci dit,

leurs papiers ont fourni beaucoup d'inspiration et de motivation à notre travail. Ces auteurs fournissent une solution au problème des EDS rétrogrades et réfléchies que nous étendons au cas de l'horizon infini en ajoutant un coefficient d'actualisation et en imposant des conditions d'admissibilité sur les stratégies, c'est à dire des suites de temps d'impulsion.

Notre principale contribution est de prouver l'existence d'une stratégie optimale qui maximise le gain moyen d'une firme mais, à la différence des précédents auteurs, dans un contexte en horizon infini.

Notre travail est organisé comme suit: la section 2 est consacrée à définir le modèle de contrôle impulsif à résoudre. Dans la section 3, nous rappelons quelques notions fondamentales de l'enveloppe de Snell et nous présentons un couple de processus continus dont l'existence, prouvée en section 5, permettra d'exhiber une stratégie optimale. Dans la section 4, nous généralisons les outils des équations rétrogrades et réfléchies à double barrière à l'horizon infini sous des hypothèses convenables.

## 2 Présentation du modèle

Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$  un espace de probabilité muni d'une filtration  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  complète continue à droite et soit un mouvement brownien  $W = (W_t)_{t \geq 0}$ . Nous noterons par  $(\mathcal{G}_t)_{t \geq 0}$  la filtration définie par  $\mathcal{G}_t = \vee_{s < t} \mathcal{F}_s$ ,  $\forall s < t$ , (notée usuellement  $\mathcal{F}_{t-}$ ).

Supposons qu'une entreprise décide à des instants aléatoires de changer de technologie afin de maximiser son gain. Nous supposons que  $\{0, 1\}$  (noté  $U$ ) est l'ensemble des technologies permises telles que 0 est l'ancienne technologie et 1 est la nouvelle technologie. L'évolution de la firme dépendant de plusieurs facteurs externes (prix sur le marché, crise mondiale, temps,...), le changement de technologie provoque un coût défini par  $c_{0,1}$  si on passe de la technologie 0 à la technologie 1 et  $c_{1,0}$  si on passe de la technologie 1 à la technologie 0. Supposons que  $c_{0,1} > c_{1,0}$ .

Nous définissons une stratégie de contrôle impulsif comme une suite:

$$\alpha := (\tau_n)_{n \geq -1},$$

où  $(\tau_n)_{n \geq -1}$  est une suite croissante de  $\mathcal{G}$ -temps d'arrêt avec  $\tau_{-1} = 0$ . On note

$$\tau := \lim_{n \rightarrow +\infty} \tau_n.$$

La suite  $(\tau_n)$  modélise la suite des instants d'impulsion du système de la façon suivante: pour tout  $n \geq 0$ ,  $\tau_{2n}$  est l'instant où la firme passe de la technologie 0 à la technologie 1 et  $\tau_{2n+1}$  est l'instant où la firme passe de 1 à 0.

Nous introduisons le processus càdlàg  $\xi$  à valeurs dans  $\{0, 1\}$  défini par  $\xi_0 = 0$  et

$$\xi_t := \xi_0 \mathbf{1}_{[0, \tau_0[}(t) + \sum_{n \geq 0} \mathbf{1}_{[\tau_{2n}, \tau_{2n+1}[}(t) + \xi_{\tau-} \mathbf{1}_{[\tau, +\infty[}(t). \quad (1)$$

La valeur de la firme est donnée par  $S_t = \exp X_t^\xi$ ,  $t \geq 0$ , où  $X^\xi$  est le processus continu à droite défini par:

$$dX_t^\xi = b(\xi_t, X_t^\xi) dt + \sigma(\xi_t, X_t^\xi) dW_t, \quad (2)$$

où  $b : U \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  et  $\sigma : U \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$  sont deux fonctions mesurables satisfaisant sur  $\mathbb{R}$  la condition de Lipschitz et la condition de croissance sous-linéaire:

- Il existe une constante  $K \geq 0$  telle que pour tout  $i \in U$  et tout  $x, y \in \mathbb{R}$ ,

$$|b(i, x) - b(i, y)| + |\sigma(i, x) - \sigma(i, y)| \leq K|x - y|.$$

- Il existe une constante  $K \geq 0$  telle que pour tout  $i \in U$  et tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$|b(i, x)|^2 + |\sigma(i, x)|^2 \leq K^2(1 + |x|^2).$$

En appelant  $f > 0$  le bénéfice net de la firme et  $c > 0$  le coût de changement de technologie, toute stratégie  $\alpha$  occasionne un gain:

$$\int_0^{+\infty} e^{-\beta s} f(\xi_s, X_s^{\xi_s}) ds - \sum_{n \geq 0} \{e^{-\beta \tau_{2n}} c_{0,1} + e^{-\beta \tau_{2n+1}} c_{1,0}\},$$

où  $\beta > 0$  est un coefficient d'actualisation.

**Définition 2.1.** La stratégie  $\alpha = (\tau_n)_{n \geq -1}$  est dite admissible si et seulement si:

$$\mathbb{E} \int_0^{+\infty} e^{-\beta s} f(\xi_s, X_s^{\xi_s}) ds < \infty \quad \mathbb{E} \sum_{n \geq 0} \{e^{-\beta \tau_{2n}} c_{0,1} + e^{-\beta \tau_{2n+1}} c_{1,0}\} < \infty.$$

On note  $\mathcal{A}$  l'ensemble des stratégies admissibles.

Le problème de contrôle impulsionnel posé consiste à prouver l'existence d'une stratégie admissible  $\hat{\alpha}$  qui maximise la fonction gain moyen  $K(\alpha, i, x)$  définie par

$$K(\alpha, i, x) = \operatorname{essup}_{\alpha \in \mathcal{A}} \mathbb{E}_{i,x} \left[ \int_0^{+\infty} e^{-\beta s} f(\xi_s, X_s^{\xi_s}) ds - \sum_{n \geq 0} \{e^{-\beta \tau_{2n}} c_{0,1} + e^{-\beta \tau_{2n+1}} c_{1,0}\} \right]. \quad (3)$$

Notons que sur l'événement  $\{\tau < \infty\}$  le gain après  $\tau$  est

$$\mathbb{E}_{i,x} \left[ \int_\tau^{+\infty} e^{-\beta s} f(\xi_s, X_s^{\xi_s}) ds \middle| \mathcal{F}_\tau \right] :$$

c'est le résultat de la décision étant de ne plus changer de stratégie.

Enfin, introduisons les ensembles utiles suivants:

- $\mathcal{T} = \{\theta : \mathcal{G}\text{-temps d'arrêt}\}.$
- $\mathcal{T}_t = \{\theta \in \mathcal{T} : \theta \geq t\}.$
- $\mathcal{P}^2 = \{ \text{processus } \mathcal{F}\text{-progressivement mesurables} \}$
- $\mathcal{C}^2 = \{(X_t)_{t \geq 0} \in \mathcal{P}^2 : \text{ tel que } \mathbb{E}[\sup_{t \geq 0} |X_t|^2] < \infty\}.$
- $\mathbb{H}^2 = \{(X_t) \in \mathcal{P}^2 : \text{ tel que } \mathbb{E}[\int_0^\infty |X_t|^2 dt] < \infty\}.$
- $\mathcal{D}_n = \{\mu \in \mathcal{P}^2 : [0, T] \times \Omega \longrightarrow [0, n]\}.$

### 3 Enveloppe de Snell

Commençons par rappeler quelques notions fondamentales de contrôle optimal de El Karoui [10] utilisées pour résoudre les problèmes de contrôle impulsif étudiés dans ce chapitre.

**Définition 3.1.** *Un processus  $U$  est de classe (D) si l'ensemble des variables aléatoires  $\{U_\theta, \theta \in \mathcal{T}\}$  est uniformément intégrable.*

**Théorème 3.2.** *Soit  $U$  un processus  $\mathcal{F}$ -adapté, càdlàg de classe (D). Notons  $Z$  son enveloppe de Snell. C'est la plus petite sur-martingale de classe (D) qui majore  $U$ :*

$$Z_t = \operatorname{essup}_{\theta \in \mathcal{T}_t} \mathbb{E}[U_\theta | \mathcal{F}_t]. \quad (4)$$

**Remarque 3.3.** *Le processus  $Z$  admet la décomposition unique suivante:*

$$Z = M - A,$$

où:

- (i)  $M$  est une martingale.
- (ii)  $A$  est un processus croissant, continu à droite, intégrable et  $A_0 = 0$ .

**Définition 3.4.** *Soit  $U$  un processus  $\mathcal{F}$ -adapté et  $Z$  son enveloppe de Snell. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un temps d'arrêt  $\hat{\tau}$  soit optimal après  $\gamma$  est que:*

- $\hat{\tau} \geq \gamma, \quad \gamma \in \mathcal{T}.$
- $Z_\gamma = \mathbb{E}[Z_{\hat{\tau}} | \mathcal{F}_\gamma] = \mathbb{E}[U_{\hat{\tau}} | \mathcal{F}_\gamma].$

*En particulier  $Z_0 = \sup_{\theta \in \mathcal{T}} \mathbb{E}[U_\theta] = \mathbb{E}[U_{\hat{\tau}}]$ . Par exemple,  $\hat{\tau} = \inf\{t \geq \gamma : Z_t = U_t\}$  est le premier temps optimal après  $\gamma$ .*

Le but principal de ce chapitre est de prouver l'existence d'une stratégie optimale  $\hat{\alpha}$  telle que

$$K(\hat{\alpha}, i, x) = \operatorname{essup}_{\alpha \in \mathcal{A}} K(\alpha, i, x).$$

Nous montrons par la suite que notre problème est réduit à prouver l'existence d'un couple de processus  $(Y^1, Y^2)$  à l'aide des outils de l'enveloppe de Snell. En effet:

**Proposition 3.5.** *Supposons qu'il existe deux processus de  $\mathcal{C}^2$   $Y^1 = (Y_t^1)_{t \geq 0}$  et  $Y^2 = (Y_t^2)_{t \geq 0}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  tels que  $\forall t \geq 0$  :*

$$Y_t^1 = \operatorname{essup}_{\theta \in \mathcal{T}_t} \mathbb{E} \left[ \int_t^\theta e^{-\beta s} f(0, X_s^0) ds - e^{-\beta \theta} c_{0,1} + Y_\theta^2 | \mathcal{F}_t \right], \quad Y_\infty^1 = 0 \quad (5)$$

$$Y_t^2 = \operatorname{essup}_{\theta \in \mathcal{T}_t} \mathbb{E} \left[ \int_t^\theta e^{-\beta s} f(1, X_s^1) ds - e^{-\beta \theta} c_{1,0} + Y_\theta^1 | \mathcal{F}_t \right], \quad Y_\infty^2 = 0. \quad (6)$$

Alors  $Y_0^1 = \sup_{\alpha \in \mathcal{A}} K(\alpha, i, x)$ . De plus, la suite  $\hat{\alpha} = (\hat{\tau}_n)_{n \geq 0}$  définie par:

$$\begin{aligned} \hat{\tau}_{-1} &= 0 \\ \hat{\tau}_{2n} &= \inf \{ t \geq \hat{\tau}_{2n-1}, Y_t^1 = -c_{0,1} e^{-\beta t} + Y_t^2 \}, \quad \forall n \geq 0, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\hat{\tau}_{2n+1} = \inf \{ t \geq \hat{\tau}_{2n}, Y_t^2 = -c_{1,0} e^{-\beta t} + Y_t^1 \} \quad (8)$$

est optimale pour le problème de contrôle impulsionnel (3).

**Preuve.** Pour tout  $t \geq 0$ , nous avons:

$$Y_t^1 + \int_0^t e^{-\beta s} f(0, X_s^0) ds = \operatorname{essup}_{\theta \in \mathcal{T}_t} \mathbb{E} \left[ \int_0^\theta e^{-\beta s} f(0, X_s^0) ds - e^{-\beta \theta} c_{0,1} + Y_\theta^2 | \mathcal{F}_t \right]. \quad (9)$$

Par définition,  $Y_t^1 + \int_0^t e^{-\beta s} f(0, X_s^0) ds$  est l'enveloppe de Snell du processus

$$U_\theta := \int_0^\theta e^{-\beta s} f(\xi_s, X_s^{\xi_s}) ds - e^{-\beta \theta} c_{0,1} + Y_\theta^2. \quad (10)$$

Sous la définition 3.4, un temps  $\hat{\tau}_0$  optimal pour le problème (10) est défini par:

$$\hat{\tau}_0 = \inf \{ t \geq 0, Y_t^1 = -e^{-\beta t} c_{0,1} + Y_t^2 \}.$$

Par suite, le temps  $\hat{\tau}_0$  est le premier temps défini en (7) et donc optimal pour le problème (5) posé. De plus, le processus  $Y_0^1$  étant  $\mathcal{F}_0$ -mesurable, alors  $Y_0^1 = \mathbb{E}[Y_0^1]$ . Par conséquent, l'égalité (9) peut être écrite pour  $t = 0$  et  $\theta = \hat{\tau}_0$  sous la forme suivante:

$$Y_0^1 = \mathbb{E} \left[ \int_0^{\hat{\tau}_0} e^{-\beta s} f(0, X_s^0) ds - e^{-\beta \hat{\tau}_0} c_{0,1} + Y_{\hat{\tau}_0}^2 \right]. \quad (11)$$

En utilisant la définition de  $Y^2$  appliquée à  $t = \hat{\tau}_0$ , nous obtenons

$$Y_{\hat{\tau}_0}^2 = \operatorname{essup}_{\theta \in \mathcal{T}, \theta \geq \hat{\tau}_0} \mathbb{E} \left[ \int_{\hat{\tau}_0}^\theta e^{-\beta s} f(1, X_s^1) ds - e^{-\beta \theta} c_{1,0} + Y_\theta^1 | \mathcal{F}_{\hat{\tau}_0} \right].$$

De même que pour le problème (10),  $Y_t^2 + \int_0^t e^{-\beta s} f(\xi_s, X_s^\xi) ds$  est l'enveloppe de Snell du processus

$$U_\theta := \int_0^\theta e^{-\beta s} f(\xi_s, X_s^\xi) ds - e^{-\beta \theta} c_{1,0} + Y_\theta^1, \quad \theta \geq \hat{\tau}_0. \quad (12)$$

Sous la définition 3.4, un temps  $\hat{\tau}_1$  optimal après  $\hat{\tau}_0$  pour le problème (12) est défini par:

$$\hat{\tau}_1 = \inf\{t \geq \hat{\tau}_0, Y_t^2 = -e^{-\beta t} c_{1,0} + Y_t^1\}.$$

Par suite, le temps  $\hat{\tau}_1$  est le deuxième temps défini en (7) et donc optimal pour le problème (6) posé. D'où,

$$Y_{\hat{\tau}_0}^2 = \mathbb{E} \left[ \int_{\hat{\tau}_0}^{\hat{\tau}_1} e^{-\beta s} f(1, X_s^1) ds - e^{-\beta \hat{\tau}_1} c_{1,0} + Y_{\hat{\tau}_1}^1 | \mathcal{F}_{\hat{\tau}_0} \right], \quad (13)$$

et les égalités (11) et (13) impliquent:

$$Y_0^1 = \mathbb{E} \left[ \int_0^{\hat{\tau}_0} e^{-\beta s} f(0, X_s^0) ds + \int_{\hat{\tau}_0}^{\hat{\tau}_1} e^{-\beta s} f(1, X_s^1) ds - e^{-\beta \hat{\tau}_0} c_{0,1} - e^{-\beta \hat{\tau}_1} c_{1,0} + Y_{\hat{\tau}_1}^1 \right]. \quad (14)$$

En utilisant

$$\int_0^{\hat{\tau}_1} e^{-\beta s} f(\xi_s, X_s^\xi) ds = \int_0^{\hat{\tau}_0} e^{-\beta s} f(0, X_s^0) ds + \int_{\hat{\tau}_0}^{\hat{\tau}_1} e^{-\beta s} f(1, X_s^1) ds,$$

l'égalité (14) devient:

$$Y_0^1 = \mathbb{E} \left[ \int_0^{\hat{\tau}_1} e^{-\beta s} f(\xi_s, X_s^\xi) ds - e^{-\beta \hat{\tau}_0} c_{0,1} - e^{-\beta \hat{\tau}_1} c_{1,0} + Y_{\hat{\tau}_1}^1 \right].$$

En répétant ce raisonnement successivement, nous obtenons:

$$Y_0^1 = \mathbb{E} \left[ \int_0^{\hat{\tau}_{2n+1}} e^{-\beta s} f(\xi_s, X_s^\xi) ds - \sum_{k=0}^n (e^{-\beta \hat{\tau}_{2k}} c_{0,1} + e^{-\beta \hat{\tau}_{2k+1}} c_{1,0}) + Y_{\hat{\tau}_{2n+1}}^1 \right]. \quad (15)$$

Le processus  $Y^1$  étant càdlàg et la suite  $(\hat{\tau}_n)$  étant croissante vers  $\hat{\tau}$ , alors les processus  $Y_{\hat{\tau}_{2n+1}}^i$ , ( $i = 1, 2$ ) tendent vers  $Y_{\hat{\tau}-}^i$  p.s. lorsque  $n$  tend vers l'infini. De plus, par définition des processus  $Y^1$  et  $Y^2$ , nous avons en passant à la limite sur l'évènement  $\{\tau < \infty\}$ :

$$Y_{\hat{\tau}-}^i = -e^{-\beta \hat{\tau}} c_{0,1} + Y_{\hat{\tau}-}^{1-i} = -e^{-\beta \hat{\tau}} (c_{0,1} + c_{1,0}) + Y_{\hat{\tau}-}^i.$$

Il en résulte que  $\tau = +\infty$  et puisque par hypothèse  $Y_\infty^1 = Y_\infty^2 = 0$ , en prenant la limite de l'égalité (15), nous obtenons  $Y_0^1 = K(\hat{\alpha}, i, x)$ .

Montrons maintenant que la stratégie  $\hat{\alpha}$  est optimale, i.e.

$$Y_0^1 \geq K(\alpha, i, x), \quad \forall \alpha \in \mathcal{A}.$$

Le temps  $\hat{\tau}_0$  étant optimal pour le problème (5), nous obtenons:

$$Y_0^1 \geq \mathbb{E} \left[ \int_0^{\tau_0} e^{-\beta s} f(0, X_s^0) ds - e^{-\beta \tau_0} c_{0,1} + Y_{\tau_0}^2 \right], \quad \forall \tau_0 > 0.$$

De plus, pour tout temps  $\tau_1 > \tau_0$ ,

$$Y_{\tau_0}^2 \geq \mathbb{E} \left[ \int_{\tau_0}^{\tau_1} e^{-\beta s} f(1, X_s^1) ds - e^{-\beta \tau_1} c_{1,0} + Y_{\tau_1}^1 | \mathcal{F}_{\tau_0} \right].$$

Ainsi, nous obtenons pour toute suite croissante vers l'infini  $(\tau_n)$ :

$$Y_0^1 \geq \mathbb{E} \left[ \int_0^{\tau_1} e^{-\beta s} f(\xi_s, X_s^{\xi_s}) ds - e^{-\beta \tau_0} c_{0,1} - e^{-\beta \tau_1} c_{1,0} + e^{-\beta \tau_1} Y_{\tau_1}^1 \right].$$

En répétant successivement le même raisonnement, nous obtenons:

$$Y_0^1 \geq \mathbb{E} \left[ \int_0^{\tau_{2n+1}} e^{-\beta s} f(\xi_s, X_s^{\xi_s}) ds - \sum_{k=0}^n (e^{-\beta \tau_{2k}} c_{0,1} + e^{-\beta \tau_{2k+1}} c_{1,0}) + Y_{\tau_{2n+1}}^1 \right]. \quad (16)$$

La partie droite de l'inégalité (16) tend vers  $K(\alpha, 0, x) + Y_\infty^1 = K(\alpha, 0, x)$  lorsque  $n$  tend vers l'infini. Par conséquent,  $Y_0^1 = K(\hat{\alpha}, 0, x) \geq K(\alpha, 0, x)$ , ce qui implique l'optimalité de  $\hat{\alpha}$ . ■

## 4 EDS rétrogrades et réfléchies

Dans cette section, nous étendons au cas de l'horizon infini des résultats concernant les équations différentielles stochastiques rétrogrades et réfléchies sous des hypothèses convenables (cf. [11] et [13]).

### 4.1 EDS rétrogrades

L'un des résultats fondamentaux concernant les équations différentielles stochastiques rétrogrades (EDSR) est le théorème donné par Pardoux et Peng [20, 21], et qui montre l'existence et l'unicité de la solution d'une EDSR en horizon fini sous des hypothèses de Lipschitz sur la fonction drift. Nous montrons l'existence de la solution en horizon infini en imposant des hypothèses supplémentaires sur la fonction drift et en utilisant des estimations du processus  $Y$ . A la différence des précédents auteurs, notre fonction drift dépend uniquement du temps et du processus  $Y$ .



**Théorème 4.1.** *Supposons que la fonction  $f(., y)$  est  $\mathcal{F}_t$ -progressivement mesurable et que:*

$$(\mathcal{H}) \begin{cases} \forall t, y \mapsto f(t, y) \text{ est décroissante,} \\ t \mapsto f(t, 0) \text{ est bornée,} \\ \text{il existe une constante } C > 0 \text{ telle que pour tout } t \geq 0 \forall y, y' \in \mathbb{R} : \\ |f(t, y) - f(t, y')| \leq C|y - y'| \text{ p.s.} \end{cases}$$

Alors, l'équation différentielle stochastique rétrograde (EDSR)

$$Y_t = \int_t^{+\infty} e^{-\beta s} f(s, Y_s) ds - \int_t^{+\infty} Z_s dW_s, \quad Y_\infty = 0, \quad t \geq 0 \quad (17)$$

admet une solution  $(Y, Z)$  telle que  $Y \in \mathcal{C}^2$ ,  $Z \in \mathbb{H}^2$ .

On montre en préalable un lemme qui sera également utile dans le cas des EDSR réfléchies.

**Lemme 4.2.** *Soit  $f$  vérifiant l'hypothèse  $(\mathcal{H})$  et  $(Y_t, Z_t, K_t^+, K_t^-), t \in [0, T]$ , solution de l'équation différentielle stochastique rétrograde réfléchie à double barrière:*

$$Y_t = \int_t^T e^{-\beta s} f(s, Y_s) ds + \int_t^T e^{-\beta s} dK_s^+ - \int_t^T e^{-\beta s} dK_s^- - \int_t^T Z_s dW_s, \quad Y_T = 0, \quad t \in [0, T],$$

où  $Y \in \mathcal{C}^2$ ,  $Z \in \mathbb{H}^2$ ,  $L_t \leq Y_t \leq U_t$ ,  $dK_s^+$  et  $dK_s^-$  sont deux mesures positives vérifiant  $\mathbb{E}[(\int_0^T e^{-\beta s} dK_s^+)^2] < \infty$ ,  $\mathbb{E}[(\int_0^T e^{-\beta s} dK_s^-)^2] < \infty$  et

$$\int_t^T e^{-\beta s} (Y_s - L_s) dK_s^+ = \int_t^T e^{-\beta s} (U_s - Y_s) dK_s^- = 0, \quad \mathbb{P}\text{-p.s.}$$

(i) Sous l'hypothèse  $U \geq 0$  et  $\sup_t L_t^+ \in \mathbb{L}^2$ , et si  $f$  ne dépend pas de  $y$  on a la majoration pour tout  $\varepsilon > 0$

$$\mathbb{E}[Y_t^2] \text{ et } \mathbb{E}\left(\int_t^T |Z_s|^2 ds\right) \leq \varphi(t) \exp\left(\int_t^T e^{-\beta u} du\right), \quad (18)$$

où  $\varphi(t) = \frac{1}{\beta} \|f\|^2 e^{-\beta t} + \frac{1}{\varepsilon} E[\sup_{s \geq t} (L_s^+)^2] + \varepsilon E[(\int_t^T e^{-\beta s} dK_s^+)^2]$ .

(ii) Si  $f$  dépend de  $y$  avec  $C$  la constante de Lipschitz de la fonction  $y \mapsto f(s, y)$ , mais si  $L \leq 0 \leq U$  voire si  $L = U = 0$  (c'est à dire le cas non réfléchi), alors pour tout  $t \in [0, T]$  :

$$\mathbb{E}[Y_t^2] \leq D e^{-\beta t}, \quad (19)$$

où  $D = \frac{1}{\beta} \|f\|^2 \exp\left(\frac{2C+1}{\beta}\right)$ .

**Preuve.** C'est une adaptation de la preuve de la Proposition 3.5 de [11]: la formule d'Itô et  $\int_t^T e^{-\beta s} (Y_s - L_s) dK_s^+ = \int_t^T e^{-\beta s} (U_s - Y_s) dK_s^- = 0$  montrent:

$$Y_t^2 + \int_t^T |Z_s|^2 ds = 2 \int_t^T Y_s e^{-\beta s} f(s, Y_s) ds + 2 \int_t^T L_s e^{-\beta s} dK_s^+ - 2 \int_t^T U_s e^{-\beta s} dK_s^- - 2 \int_t^T Y_s Z_s dW_s.$$

(i) Dans ce premier cas,  $f$  ne dépend pas de  $y$  et de ce fait est bornée par  $\|f\|$  et

$$2 \int_t^T Y_s e^{-\beta s} f(s, \omega) ds \leq \int_t^T Y_s^2 e^{-\beta s} ds + \int_t^T e^{-\beta s} \|f\|^2 ds,$$

de plus, pour tout  $\varepsilon > 0$ :

$$\begin{aligned} 2 \int_t^T L_s e^{-\beta s} dK_s^+ &\leq 2 \int_t^T L_s^+ e^{-\beta s} dK_s^+ \\ &\leq 2 \sup_{s \geq t} L_s^+ \int_t^T e^{-\beta s} dK_s^+ \leq \frac{1}{\varepsilon} \sup_{s \geq t} (L_s^+)^2 + \varepsilon \left( \int_t^T e^{-\beta s} dK_s^+ \right)^2 \end{aligned}$$

(on utilise  $2ab \leq \frac{1}{\varepsilon} a^2 + \varepsilon b^2$ ). Ainsi, puisque  $U \geq 0$  et  $dK^-$  mesure positive, il vient globalement

$$\mathbb{E}[Y_t^2] + \int_t^T |Z_s|^2 ds \leq \int_t^T \mathbb{E}[Y_s^2] e^{-\beta s} ds + \frac{1}{\beta} e^{-\beta t} \|f\|^2 + \frac{1}{\varepsilon} \mathbb{E}[\sup_{s \geq t} (L_s^+)^2] + \varepsilon \mathbb{E} \left[ \left( \int_t^T e^{-\beta s} dK_s^+ \right)^2 \right].$$

On applique le lemme de Gronwall pour majorer la fonction  $t \mapsto \mathbb{E}[Y_t^2]$  (cf. appendice) avec  $\psi(t) = e^{-\beta t}$  et

$$\varphi(t) = \frac{1}{\beta} \|f\|^2 e^{-\beta t} + \frac{1}{\varepsilon} \mathbb{E}[\sup_{s \geq t} (L_s^+)^2] + \varepsilon \mathbb{E} \left[ \left( \int_t^T e^{-\beta s} dK_s^+ \right)^2 \right]. \quad (20)$$

Comme  $\varphi$  est décroissante il vient:

$$\mathbb{E}[Y_t^2] \leq \varphi(t) \exp \left( \int_t^T e^{-\beta u} du \right).$$

On a aussi par conséquent, puisque  $\int_t^T |Z_s|^2 ds \leq Y_t^2 + \int_t^T |Z_s|^2 ds$ , la même majoration

$$\mathbb{E} \left( \int_t^T |Z_s|^2 ds \right) \leq \varphi(t) \exp \left( \int_t^T e^{-\beta u} du \right).$$

(ii) Dans le cas où  $f$  est Lipschitzienne de coefficient  $C$  et  $L \leq 0 \leq U$  on reprend le développement de Itô:

$$Y_t^2 + \int_t^T |Z_s|^2 ds = 2 \int_t^T Y_s e^{-\beta s} f(s, Y_s) ds + 2 \int_t^T L_s e^{-\beta s} dK_s^+ - 2 \int_t^T U_s e^{-\beta s} dK_s^- - 2 \int_t^T Y_s Z_s dW_s.$$

dont on prend l'espérance après avoir utilisé la propriété de Lipschitz de la fonction  $y \mapsto f(s, y)$ , la majoration  $2|Y_s||f(s, 0)| \leq |Y_s|^2 + |f(s, 0)|^2$  et  $L_t \leq 0 \leq U_t$ :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Y_t^2] &\leq \mathbb{E} \left[ 2C \int_t^T Y_s^2 e^{-\beta s} ds + \int_t^T e^{-\beta s} 2|Y_s||f(s, 0)| ds \right] \\ &\leq \mathbb{E} \left[ (2C + 1) \int_t^T Y_s^2 e^{-\beta s} ds + \int_t^T e^{-\beta s} f^2(s, 0) ds \right]. \end{aligned}$$

On applique le lemme de Gronwall (cf. appendice) avec

$$\varphi(t) = \frac{1}{\beta} \|f\|^2 e^{-\beta t} \quad \text{et} \quad \psi(t) = (2C + 1)e^{-\beta t}.$$

Comme  $\varphi$  est décroissante, il vient:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Y_t^2] &\leq \frac{1}{\beta} \|f\|^2 e^{-\beta t} \exp \left( (2C + 1) \int_t^T e^{-\beta u} du \right) \\ &\leq \frac{1}{\beta} \|f\|^2 e^{-\beta t} \exp \left( \frac{2C + 1}{\beta} \right). \end{aligned}$$

■

**Preuve du théorème 4.1.** En utilisant la proposition 2.2 de [20, p. 57], on déduit l'existence  $\forall n$  d'un couple de processus  $(Y^n, Z^n)$  qui vérifient  $Y^n \in \mathcal{C}^2$ ,  $Z^n \in \mathbb{H}^2$  et  $\forall t \leq n$ :

$$Y_t^n = \int_t^n e^{-\beta s} f(s, Y_s^n) ds - \int_t^n Z_s^n dW_s, \quad Y_t^n = 0 \quad \forall t \geq n.$$

Ensuite,  $\forall k \geq n$ , nous obtenons:

$$\begin{aligned} Y_t^{n+k} - Y_t^n &= \int_t^n e^{-\beta s} [f(s, Y_s^{n+k}) - f(s, Y_s^n)] ds + \int_n^{n+k} e^{-\beta s} f(s, Y_s^{n+k}) ds \\ &\quad - \int_t^n [Z_s^{n+k} - Z_s^n] dW_s - \int_n^{n+k} Z_s^{n+k} dW_s. \end{aligned}$$

Appliquons la formule d'Itô à  $(Y_t^{n+k} - Y_t^n)^2$  entre  $t$  et  $n$ , où l'on ajoute le développement de  $Y^{n+k}$  entre  $n$  et  $n+k$  nous obtenons:

$$\begin{aligned} &(Y_t^{n+k} - Y_t^n)^2 + \int_t^n (Z_s^{n+k} - Z_s^n)^2 ds + \int_n^{n+k} (Z_s^{n+k})^2 ds \\ &= 2 \int_t^n e^{-\beta s} (Y_s^{n+k} - Y_s^n) [f(s, Y_s^{n+k}) - f(s, Y_s^n)] ds + 2 \int_n^{n+k} e^{-\beta s} Y_s^{n+k} f(s, Y_s^{n+k}) ds \\ &\quad - 2 \int_t^n (Y_s^{n+k} - Y_s^n) (Z_s^{n+k} - Z_s^n) dW_s - 2 \int_n^{n+k} Y_s^{n+k} Z_s^{n+k} dW_s. \end{aligned}$$

En utilisant que  $\forall y, t \mapsto f(t, y)$  est décroissante et en passant à l'espérance, nous obtenons:

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}(Y_t^{n+k} - Y_t^n)^2 + \mathbb{E} \int_t^n (Z_s^{n+k} - Z_s^n)^2 ds + \mathbb{E} \int_n^{n+k} (Z_s^{n+k})^2 ds \leq 2 \mathbb{E} \int_n^{n+k} e^{-\beta s} Y_s^{n+k} f(s, Y_s^{n+k}) ds \\ &\leq 2 \mathbb{E} \int_n^{n+k} e^{-\beta s} |Y_s^{n+k}| |f(s, Y_s^{n+k}) - f(s, 0)| ds + 2 \mathbb{E} \int_n^{n+k} e^{-\beta s} |Y_s^{n+k}| |f(s, 0)| ds. \end{aligned}$$

En utilisant la condition de Lipschitz, il vient:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y_t^{n+k} - Y_t^n)^2 &+ \mathbb{E} \int_t^n (Z_s^{n+k} - Z_s^n)^2 ds \\
&\leq 2\mathbb{E} \int_n^{n+k} C e^{-\beta s} |Y_s^{n+k}|^2 ds + 2\mathbb{E} \int_n^{n+k} e^{-\beta s} |Y_s^{n+k}| |f(s, 0)| ds \\
&\leq 2\mathbb{E} \int_n^{n+k} C e^{-\beta s} |Y_s^{n+k}|^2 ds + 2 \left[ \mathbb{E} \int_n^{n+k} e^{-\beta s} |Y_s^{n+k}|^2 ds \right]^{\frac{1}{2}} \left[ \mathbb{E} \int_n^{n+k} e^{-\beta s} |f(s, 0)|^2 ds \right]^{\frac{1}{2}},
\end{aligned}$$

où la dernière égalité est obtenue en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz. De plus,  $s \mapsto f(s, 0)$  étant bornée, nous avons:

$$\left[ \mathbb{E} \int_n^{n+k} e^{-\beta s} |f(s, 0)|^2 ds \right]^{\frac{1}{2}} \longrightarrow 0$$

lorsque  $n$  tend vers l'infini. Ensuite, en utilisant (19) pour tout  $n$  et tout  $k$  avec  $L = U = 0$  :

$$\mathbb{E}[(Y_s^{n+k})^2] \leq D e^{-\beta s},$$

où  $D = \frac{1}{\beta} \|f\|^2 \exp\left(\frac{2C+1}{\beta}\right)$ . En passant à l'intégrale et en utilisant Tonelli et la bornitude de  $s \mapsto f(s, 0)$ ,

$$\mathbb{E} \int_n^{n+k} e^{-\beta s} |Y_s^{n+k}|^2 ds \leq D \int_n^{n+k} e^{-2\beta s} ds \leq \frac{D}{2\beta} e^{-2\beta n}.$$

Ainsi, lorsque  $n$  tend vers l'infini

$$\mathbb{E} \int_n^{n+k} e^{-\beta s} |Y_s^{n+k}|^2 ds \longrightarrow 0$$

lorsque  $n$  tend vers l'infini. Par conséquent, les suites  $(Y^n)$  et  $(Z^n)$  sont deux suites de Cauchy qui convergent respectivement dans  $\mathbb{L}^2(\Omega)$  et  $\mathbb{L}^2([0, \infty[ \times \Omega, dt \otimes d\mathbb{P})$  vers deux processus  $Y, Z$  qui sont donc respectivement élément de  $\mathbb{L}^2(\Omega)$  et  $\mathbb{L}^2([0, \infty[ \times \Omega, dt \otimes d\mathbb{P})$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Y_t^n = Y_t \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} Z_t^n = Z_t.$$

On a donc pour tout  $t$ ,  $Y_t \in \mathbb{L}^2(\Omega)$ ,  $Z \in \mathbb{L}^2([0, \infty[ \times \Omega, dt \otimes d\mathbb{P})$ ,  $\mathbb{E}(Y_t)^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(Y_t^n)^2$  et par suite:

$$\mathbb{E}(Y_t)^2 \leq D e^{-\beta t}.$$

Par limite presque sûre de la relation vérifiée pour tout  $n$  par le couple  $(Y^n, Z^n)$ , plus la continuité sur  $\mathbb{R}$  de la fonction  $f$ , on obtient L'EDSR (17).

Enfin, de la relation (17) on tire

$$Y_t = Y_0 - \int_0^t e^{-\beta s} (f(s, Y_s) - f(s, 0)) ds - \int_0^t e^{-\beta s} f(s, 0) ds + \int_0^t Z_s dW_s,$$

le deuxième terme avec la condition de Lipschitz est majoré en valeur absolue par

$$\left| \int_0^t e^{-\beta s} (f(s, Y_s) - f(s, 0)) ds \right| \leq C \int_0^t e^{-\beta s} |Y_s| ds,$$

et

$$\sup_t |Y_t| \leq |Y_0| + C \int_0^\infty e^{-\beta s} |Y_s| ds + \frac{\|f\|}{\beta} + \sup_t \left| \int_0^\infty Z_s dW_s \right|,$$

c'est à dire une majoration par la somme de quatre termes dans  $\mathbb{L}^2 : \mathbb{E}(\sup_t |Y_t|^2) < \infty$ , et  $Y \in \mathcal{C}^2$ . ■

**Corollaire 4.3.** *Supposons que  $(Y, Z)$  et  $(Y', Z')$  sont solutions de l'EDS rétrograde (17) associées à  $f$  et  $f'$ , avec  $f$  et  $f'$  satisfaisant  $(\mathcal{H})$ . Supposons de plus que  $\forall y \in \mathbb{R}$ :*

$$(\mathcal{H}_1) : \quad f(t, y) \leq f'(t, y) \quad dt \otimes d\mathbb{P}\text{-p.s.}$$

Alors:

$$Y_t \leq Y'_t, \quad t \geq 0, \quad \mathbb{P}\text{-p.s.}$$

**Preuve.** La preuve de ce corollaire est une conséquence immédiate de l'hypothèse  $(\mathcal{H}_1)$  et du théorème 4.1 de El Karoui et al. [11, p. 712]. En effet, sous  $(\mathcal{H}_1)$ , nous obtenons:

$$Y_t^n \leq Y_t'^n, \quad \forall n, \forall t \in [0, n], \quad \mathbb{P}\text{-p.s.}$$

En faisant tendre  $n$  vers l'infini nous obtenons la comparaison recherchée:

$$Y_t \leq Y'_t, \quad t \geq 0, \quad \mathbb{P}\text{-p.s.} \quad \blacksquare$$

## 4.2 EDS rétrogrades réfléchies

Dans cette section, nous généralisons des résultats de El Karoui et al. [11] et Hamadène et al. [13] pour la résolution des équations différentielles stochastiques rétrogrades réfléchies (EDSRR) à double barrière. On dispose de deux données:

- Rappelons que la fonction  $f(., y)$  est  $\mathcal{F}_t$ -progressivement mesurable et que:

$$(\mathcal{H}) \begin{cases} \forall t, y \mapsto f(t, y) \text{ est décroissante,} \\ t \mapsto f(t, 0) \text{ est bornée,} \\ \text{il existe une constante } C > 0 \text{ telle que pour tout } t \geq 0, \forall y, y' \in \mathbb{R} : \\ |f(t, y) - f(t, y')| \leq C|y - y'| \text{ p.s.} \end{cases}$$

- Une barrière  $(L_t)_{t \geq 0}$ : un processus continu à valeurs réelles  $\mathcal{F}$ -adapté satisfaisant:

$$\mathbb{E} \left( \sup_{t \geq 0} (L_t^+)^2 \right) < \infty.$$

Nous étendons au cas de l'horizon infini la proposition 5.1 de El Karoui et al. [11, p. 716]: nous étudions des EDS rétrogrades réfléchies en horizon infini avec une barrière  $(L_t)_{t \geq 0}$ .

**Théorème 4.4.** *Sous les hypothèses  $(\mathcal{H})$  mais avec  $f$  ne dépendant pas de  $y$  et  $\mathbb{E} \left( \sup_{t \geq 0} (L_t^+)^2 \right) < \infty$ , il existe une solution  $(Y, Z, K)$  telle que pour tout  $t \geq 0$ :*

$$i/ \ Y \in \mathcal{C}^2, \ Z \in \mathbb{H}^2.$$

ii/

$$Y_t = \int_t^{+\infty} e^{-\beta s} f(s) ds + \int_t^{+\infty} e^{-\beta s} dK_s - \int_t^{+\infty} Z_s dW_s, \ Y_\infty = 0. \quad (21)$$

$$iii/ \ Y_t \geq L_t.$$

$$iv/ \ (dK_t) \text{ est une mesure positive vérifiant } \mathbb{E}[(\int_0^\infty e^{-\beta s} dK_s)^2] < \infty \text{ et}$$

$$\int_0^t e^{-\beta s} (Y_s - L_s) dK_s = 0, \quad \mathbb{P}\text{-p.s.}$$

$$v/ \ Y_t = \operatorname{essup}_{\theta \geq t} \mathbb{E} \left[ \int_t^\theta e^{-\beta s} f(s, \omega) ds + L_\theta | \mathcal{F}_t \right].$$

**Preuve.** *i/* En utilisant la proposition 5.1 de [11, p. 716], on déduit l'existence  $\forall n$  d'un triplet de processus  $(Y^n, Z^n, K^n)$  qui vérifient  $Y^n \in \mathcal{C}^2([0, n])$ ,  $Z^n \in \mathbb{H}^2([0, n] \times \Omega)$  et  $\forall t \leq n$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} Y_t^n \geq L_t, \ Y_t^n = 0 \quad \forall t \geq n. \\ Y_t^n = \int_t^n e^{-\beta s} f(s) ds + \int_t^n e^{-\beta s} dK_s^n - \int_t^n Z_s^n dW_s. \\ \mathbb{E}(\int_0^n e^{-\beta s} dK_s^n)^2 < \infty \text{ et } \int_0^t e^{-\beta s} (Y_s^n - L_s) dK_s^n = 0, \quad t \leq n \quad \mathbb{P}\text{-p.s.} \end{array} \right.$$

Le théorème de comparaison de S. Hamadène et al. ([13, p. 164], proposition 41.3) appliquée à la suite croissante  $f_n(s) = f(s) \mathbf{1}_{[0, n]}$  implique que  $(Y^n)_n$  est une suite croissante de processus et que  $(\int e^{-\beta s} dK^n)_n$  est une suite décroissante de processus. On note leurs limites presque sûres respectivement  $Y$  et  $\int e^{-\beta s} dK_s$ .

Ensuite,  $\forall k \geq 0$  et  $\forall t \leq n$  nous obtenons:

$$\begin{aligned} Y_t^{n+k} - Y_t^n &= \int_n^{n+k} e^{-\beta s} f(s, \omega) ds + \int_t^n e^{-\beta s} [dK_s^{n+k} - dK_s^n] \\ &+ \int_n^{n+k} e^{-\beta s} dK_s^{n+k} - \int_t^n [Z_s^{n+k} - Z_s^n] dW_s - \int_n^{n+k} Z_s^{n+k} dW_s. \end{aligned} \quad (22)$$

Appliquons la formule d'Itô à  $(Y_t^{n+k} - Y_t^n)^2$  entre  $t$  et  $n$ , nous obtenons:

$$\begin{aligned} (Y_t^{n+k} - Y_t^n)^2 &+ \int_t^n (Z_s^{n+k} - Z_s^n)^2 ds = (Y_n^{n+k})^2 \\ &+ 2 \int_t^n e^{-\beta s} (Y_s^{n+k} - Y_s^n) (dK_s^{n+k} - dK_s^n) - 2 \int_t^n (Y_s^{n+k} - Y_s^n) (Z_s^{n+k} - Z_s^n) dW_s. \end{aligned}$$

En utilisant la croissance de la suite  $(Y_s^n)$  et la décroissance de la suite  $(\int e^{-\beta s} dK_s^n)_n$ , puis en prenant l'espérance, nous obtenons:

$$\mathbb{E}(Y_t^{n+k} - Y_t^n)^2 + \mathbb{E} \int_t^n (Z_s^{n+k} - Z_s^n)^2 ds \leq \mathbb{E}(Y_n^{n+k})^2.$$

En utilisant (18), nous obtenons pour tout  $\varepsilon > 0$ ,  $n$  et tout  $k$ :

$$\mathbb{E}(Y_n^{n+k})^2 \text{ et } \mathbb{E}[(\int_n^{n+k} Z_s^{n+k} dW_s)^2] \leq \varphi(n) \exp\left(\int_n^{n+k} e^{-\beta u} du\right) \leq \exp\left(\frac{1}{\beta}\right) \varphi(n) \quad (23)$$

rappelant (20)

$$\varphi(n) = \frac{1}{\beta} \|f\|^2 e^{-\beta n} + \frac{1}{\varepsilon} E[\sup_{s \geq n} (L_s^+)^2] + \varepsilon E[(\int_n^{n+k} e^{-\beta s} dK_s^{n+k})^2].$$

De l'équation

$$\int_n^{n+k} e^{-\beta s} dK_s^{n+k} = Y_n^{n+k} - \int_t^n e^{-\beta s} f(s, \omega) ds + \int_n^{n+k} Z_s^{n+k} dW_s,$$

et de l'estimation (23), nous obtenons:

$$\frac{1}{3} \mathbb{E}(\int_n^{n+k} e^{-\beta s} dK_s^{n+k})^2 \leq 2 \exp\left(\frac{1}{\beta}\right) \varphi(n) + e^{-\beta n} \frac{1}{\beta} \|f\|^2.$$

Si on retranche de  $\varphi(n)$  le terme  $\varepsilon \mathbb{E}[(\int_n^{n+k} e^{-\beta s} dK_s^{n+k})^2]$  il vient

$$\left(\frac{1}{3} - 2\varepsilon \exp\left(\frac{1}{\beta}\right)\right) \mathbb{E}(\int_n^{n+k} e^{-\beta s} dK_s^{n+k})^2 \leq (1 + 2 \exp\left(\frac{1}{\beta}\right)) \frac{1}{\beta} \|f\|^2 e^{-\beta n} + \frac{1}{\varepsilon} \mathbb{E}[\sup_{s \geq n} (L_s^+)^2], \quad (24)$$

donc tend vers zero uniformément dès que  $\varepsilon$  est choisi assez petit: en effet, puisque  $\sup_s L_s^+ \in \mathbb{L}^2$ , par le théorème de Lebesgue de convergence monotone  $\mathbb{E}[\sup_{s \geq n} (L_s^+)^2]$

tend vers 0 quand  $n$  tend vers l'infini. Globalement  $\varphi(n) \rightarrow 0$  quand  $n$  tend vers l'infini et on obtient par (23) que les suites  $(Y^n)$  et  $(Z^n)$  sont deux suites de Cauchy qui convergent respectivement dans  $\mathbb{L}^2(\Omega)$  et  $\mathbb{L}^2([0, \infty[ \times \Omega, dt \otimes d\mathbb{P})$  vers deux processus  $Y, Z$  :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Y_t^n = Y_t \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} Z_t^n = Z_t.$$

On a donc  $Y_t \in \mathbb{L}^2$  pour tout  $t$ ,  $Z \in \mathbb{L}^2([0, \infty[ \times \Omega, dt \otimes d\mathbb{P})$  et  $\mathbb{E}(Y_t^2) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(Y_t^n)^2$ , d'où,

$$\mathbb{E}(Y_t^2) \leq \exp\left(\frac{1}{\beta}\right)\varphi(t). \quad (25)$$

ii/ Par limite presque sûre de la relation vérifiée pour tout  $n$  par le triplet  $(Y^n, Z^n, K^n)$ , on obtient L'EDSRR (21).

iii/ Puisque pour tout  $n$ ,  $Y_t^n \geq L_t$  à la limite on a également  $Y_t \geq L_t$  presque sûrement soit l'item iii/.

iv/ Examinons maintenant la différence pour tout  $n$  et  $0 \leq t \leq n \leq n+k$

$$\int_t^n e^{-\beta s} dK_s^n - \int_t^{n+k} e^{-\beta s} dK_s^{n+k} = \left( \int_t^n e^{-\beta s} dK_s^n - \int_t^n e^{-\beta s} dK_s^{n+k} \right) - \int_n^{n+k} e^{-\beta s} dK_s^{n+k}$$

dont le second terme tend vers 0 dans  $\mathbb{L}^2$  par (24). Quant au premier utilisant (22) il se récrit

$$\int_t^n e^{-\beta s} dK_s^n - \int_t^n e^{-\beta s} dK_s^{n+k} = (Y_t^n - Y_t^{n+k}) + Y_n^{n+k} + \int_t^n (Z_s^n - Z_s^{n+k}) dW_s.$$

Ces trois termes convergent vers 0 dans  $\mathbb{L}^2$  : le premier et le troisième sont les restes de Cauchy des suites de Cauchy définissant respectivement  $Y$  et  $Z$ . Le second vérifie (23):  $\mathbb{E}[(Y_n^{n+k})^2] \leq \exp\left(\frac{1}{\beta}\right)\varphi(n)$ . Donc  $(\int_t^n e^{-\beta s} dK_s^n)_n$  est une suite de Cauchy dans  $\mathbb{L}^2$ , et sa limite  $\int_t^\infty e^{-\beta s} dK_s$  est donc élément de  $L^2$ .

Pour achever la preuve de iv/, pour tout  $n$  on a l'identité

$$\int_0^t e^{-\beta s} (Y_s^n - L_s) dK_s^n = 0, \quad t \leq n.$$

La monotonie de la suite de mesures  $K^n$  montre que  $\lim_n p.s. \int_0^t e^{-\beta s} L_s dK_s^n = \int_0^t e^{-\beta s} L_s dK_s$ . Par ailleurs développons (en rappelant que par définition  $Y_s^n = 0$  pour tout  $s \geq n$ ) la différence suivante:

$$\begin{aligned} & \int_0^t e^{-\beta s} Y_s^n dK_s^n - \int_0^t e^{-\beta s} Y_s dK_s = \\ & \int_0^t e^{-\beta s} Y_s^n (dK_s^n - dK_s) + \int_0^t e^{-\beta s} (Y_s^n - Y_s) dK_s. \end{aligned}$$



Le deuxième terme tend presque sûrement vers 0 par convergence de Lebesgue monotone. Pour le premier, notons que  $L_s \leq Y_s^n \leq Y_s$ , il converge vers 0 par convergence de Lebesgue majorée.

Suite de l'item *i*/: De la relation (21) on tire

$$Y_t = Y_0 - \int_0^t e^{-\beta s} f(s) ds - \int_0^t e^{-\beta s} dK_s + \int_0^t Z_s dW_s.$$

on a donc puisqu'ici  $f$  ne dépend pas de  $y$  et dans ce cas est bornée :

$$\sup_t |Y_t| \leq |Y_0| + \|f\| \frac{1}{\beta} + \int_0^\infty e^{-\beta s} dK_s + \sup_t \left| \int_0^\infty Z_s dW_s \right|$$

c'est à dire une majoration par la somme de quatre termes dans  $\mathbb{L}^2$  :  $\mathbb{E}[\sup_t |Y_t|^2] < \infty$  et  $Y \in \mathcal{C}^2$ .

*v*/ En utilisant la preuve de la proposition 5.1 de [11, p. 716], l'hypothèse  $\sup_t L_t^+ \in \mathbb{L}^2$  étant vérifiée, on a de plus pour tout  $n$ :

$$Y_t^n = \text{essup}_{t \leq \theta \leq n} \mathbb{E} \left[ \int_t^\theta e^{-\beta s} f(s) ds + L_\theta | \mathcal{F}_t \right].$$

On obtient donc l'item *v*/ par simple limite croissante presque sûre des deux membres de l'égalité. ■

**Corollaire 4.5.** *Supposons que  $(Y, Z, K)$  et  $(Y', Z', K')$  sont solutions de l'équation stochastique rétrograde réfléchie (21) associées à  $(f, L)$  et  $(f', L)$ , satisfaisant  $(\mathcal{H})$  et  $(\mathcal{H}_1)$ . Alors:*

$$\forall t \geq 0, Y_t \leq Y_t' \text{ et } \int_0^t e^{-\beta s} dK_s \geq \int_0^t e^{-\beta s} dK_s', \quad \mathbb{P}\text{-p.s.}$$

**Preuve.** Soient  $(Y^n, Z^n)$  et  $(Y'^n, Z'^n)$  solutions des EDS rétrogrades ordinaires suivantes:

$$\begin{aligned} Y_t^n &= \int_t^T e^{-\beta s} f(s) ds + n \int_t^T e^{-\beta s} (Y_s^n - L_s)^- ds - \int_t^T Z_s^n dW_s, \quad Y_T^n = 0 \\ Y_t'^n &= \int_t^T e^{-\beta s} f'(s) ds + n \int_t^T e^{-\beta s} (Y_s'^n - L_s)^- ds - \int_t^T Z_s'^n dW_s, \quad Y_T'^n = 0. \end{aligned}$$

On pose  $f_n(t, y) = f(t) - ne^{-\beta s}(y - L_s)^-$  et  $f'_n(t, y) = f'(t) - ne^{-\beta s}(y - L_s)^-$ . Sous  $(\mathcal{H}_1)$ , nous obtenons  $f_n \leq f'_n$  et par suite, en utilisant le résultat de comparaison des EDS rétrogrades (corollaire 4.3), on a  $Y_t^n \leq Y_t'^n$ ,  $\forall n, t \geq 0$ ,  $\mathbb{P}$ -p.s. Ensuite, en utilisant El Karoui et al. [11, p. 719], on a:

$$\int_t^T e^{-\beta s} dK_s^n = n \int_t^T e^{-\beta s} (Y_s^n - L_s)^- ds,$$

et en utilisant  $Y_t^n \leq Y_t'^n$ , il vient:

$$n \int_t^T e^{-\beta s} (Y_s^n - L_s)^- ds \geq n \int_t^T e^{-\beta s} (Y_s'^n - L_s)^- ds.$$

Par conséquent:

$$\int_0^t e^{-\beta s} dK_s^n \geq \int_0^t e^{-\beta s} dK_s'^n, \quad \forall t \leq n, \quad \mathbb{P}\text{-p.s.}$$

En faisant tendre  $n$  vers l'infini nous obtenons les comparaisons recherchées:

$$Y_t \leq Y_t', \quad t \geq 0, \quad \mathbb{P}\text{-p.s.} \quad \text{et} \quad \int_0^t e^{-\beta s} dK_s \geq \int_0^t e^{-\beta s} dK_s', \quad \mathbb{P}\text{-p.s.}$$

■

### 4.3 EDSR réfléchies à double barrière

Dans cette section, nous généralisons le théorème 42.2 de Hamadène et al. [13, p. 167] dans le cas de l'horizon infini. Supposons maintenant que notre système admet deux barrières  $(L_t)_{t \geq 0}$  et  $(U_t)_{t \geq 0}$ : deux processus continus à valeurs réelles  $\mathcal{F}$ -adaptés satisfaisant:

$$L_t \leq 0 \leq U_t.$$

**Théorème 4.6.** *Sous les hypothèses  $(\mathcal{H})$  et  $L_t \leq 0 \leq U_t$ , il existe un processus  $(Y, Z, K^+, K^-)$  tel que pour tout  $t \geq 0$ :*

i/  $Y \in \mathcal{C}^2$  et  $Z \in \mathbb{H}^2$ .

ii/

$$Y_t = \int_t^{+\infty} e^{-\beta s} f(s) ds + \int_t^{+\infty} e^{-\beta s} dK_s^+ - \int_t^{+\infty} e^{-\beta s} dK_s^- - \int_t^{+\infty} Z_s dW_s, \quad Y_\infty = 0. \quad (26)$$

iii/  $L_t \leq Y_t \leq U_t$ .

iv/  $(dK_t^+)$  et  $(dK_t^-)$  sont deux mesures positives vérifiant  $\mathbb{E}(\int_0^\infty e^{-\beta s} dK_s^+)^2 < \infty$ ,  $\mathbb{E}(\int_0^\infty e^{-\beta s} dK_s^-)^2 < \infty$  et

$$\int_0^t (Y_s - L_s) e^{-\beta s} dK_s^+ = \int_0^t (U_s - Y_s) e^{-\beta s} dK_s^- = 0, \quad \mathbb{P}\text{-p.s.}$$

On montre en préalable des résultats qui seront utiles pour démontrer le théorème 4.6. En utilisant [13, 18], on déduit une comparaison des processus dans le cas des équations différentielles réfléchies à double barrière en horizon fini:

**Proposition 4.7.** Soient  $(Y_t, Z_t, K_t^+, K_t^-)$  et  $(Y'_t, Z'_t, K'^+_t, K'^-_t)$ ,  $t \in [0, T]$  solutions des EDS rétrogrades réfléchies associées à  $(f, L, U)$  et  $(f', L, U)$  où  $f$  ne dépend pas de  $y$  satisfaisant  $(\mathcal{H})$  et  $(\mathcal{H}_1)$ . Alors:

$$\forall t \in [0, T], Y_t \leq Y'_t, \quad \int_0^t e^{-\beta s} dK_s^+ \geq \int_0^t e^{-\beta s} dK'^+_s \quad \text{et} \quad \int_0^t e^{-\beta s} dK_s^- \leq \int_0^t e^{-\beta s} dK'^-_s.$$

**Preuve.** 1. Suivant la construction de ces solutions donnée par [18], ces solutions sont définies comme limite des triplets suivants: soient  $(Y^n, Z^n, K^n)$  et  $(Y'^n, Z'^n, K'^n)$  solutions des EDSRR suivantes:

$$Y_t^n = \int_t^T e^{-\beta s} f(s) ds + \int_t^T e^{-\beta s} dK_s^n - n \int_t^T e^{-\beta s} (Y_s^n - U_s)^+ ds - \int_t^T Z_s^n dW_s, \quad Y_T^n = 0 \quad (27)$$

$$Y'_t{}^n = \int_t^T e^{-\beta s} f'(s) ds + \int_t^T e^{-\beta s} dK'^n_s - n \int_t^T e^{-\beta s} (Y'^n_s - U_s)^+ ds - \int_t^T Z'^n_s dW_s, \quad Y'^n_T = 0. \quad (28)$$

On pose  $f_n(t, y) = f(t) - ne^{-\beta t}(y - U_t)^+$  et  $f'_n(t, y) = f'(t) - ne^{-\beta t}(y - U_t)^+$ . Sous l'hypothèse  $(\mathcal{H}_1)$ , nous obtenons  $f_n \leq f'_n$  et par suite, pour tout  $n$  (cf. proposition 2.3 [13, p. 3]):

$$Y_t^n \leq Y'^n_t, \quad \forall n, t \geq 0, \quad \mathbb{P} - \text{p.s. et} \quad \int_0^t e^{-\beta s} dK_s^n \geq \int_0^t e^{-\beta s} dK'^n_s, \quad \forall t \leq n.$$

En faisant tendre  $n$  vers l'infini, puisque les suites de fonctions  $f_n, f'_n$  sont décroissantes, les limites décroissantes (respectivement croissantes) presque sûres  $Y_t^n, Y'^n_t$  respectivement  $\int_0^t e^{-\beta s} dK_s^n$  et  $\int_0^t e^{-\beta s} dK'^n_s$  sont d'après respectivement les preuves du lemme 2 et du lemme 6 de [18]  $Y_t, Y'_t, \int_0^t e^{-\beta s} dK_s^+$  et  $\int_0^t e^{-\beta s} dK'^+_s$  qui vérifient bien à la limite  $Y_t \leq Y'_t, \int_0^t e^{-\beta s} dK_s^+ \geq \int_0^t e^{-\beta s} dK'^+_s$ .

2. Par définition des solutions des EDSRR en horizon fini, il vient:

$$\int_0^t e^{-\beta s} dK_s^- = Y_t - Y_0 + \int_0^t e^{-\beta s} f(s) ds + \int_0^t e^{-\beta s} dK_s^+ - \int_0^t Z_s dW_s.$$

De l'EDSRR (27), on tire

$$n \int_0^t e^{-\beta s} (Y_s^n - U_s)^+ ds = Y_t^n - Y_0^n + \int_0^t e^{-\beta s} f(s) ds + \int_0^t e^{-\beta s} dK_s^n - \int_0^t Z_s^n dW_s.$$

Par différence des deux précédentes égalités, on obtient:

$$n \int_0^t e^{-\beta s} (Y_s^n - U_s)^+ ds - \int_0^t e^{-\beta s} dK_s^- = (Y_t^n - Y_t) - (Y_0^n - Y_0) + \int_0^t e^{-\beta s} (dK_s^n - dK_s^+) - \int_0^t (Z_s^n - Z_s) dW_s.$$

Les suites  $(Y^n)$  et  $(Z^n)$  sont deux suites de Cauchy qui convergent respectivement dans  $\mathbb{L}^2(\Omega)$  et  $\mathbb{L}^2([0, \infty[ \times \Omega, dt \otimes d\mathbb{P})$  vers  $Y, Z$  (cf. lemmes 5 et 6 de [18, p. 170-171]). De plus,  $\int_0^t e^{-\beta s} dK_s^n$  est une suite décroissante de limite presque sûre  $\int_0^t e^{-\beta s} dK_s^+$ . Par conséquent,  $n \int_0^t e^{-\beta s} (Y_s^n - U_s)^+ ds$  converge p.s. vers  $\int_0^t e^{-\beta s} dK_s^-$  lorsque  $n$  tend vers l'infini.

Ensuite, en utilisant  $Y_t^n \leq Y_t^m$ , nous obtenons:

$$n \int_0^t e^{-\beta s} (Y_s^n - U_s)^+ ds \leq n \int_0^t e^{-\beta s} (Y_s^m - U_s)^+ ds.$$

Par passage à la limite, nous obtenons la dernière comparaison recherchée:

$$\int_0^t e^{-\beta s} dK_s^- \leq \int_0^t e^{-\beta s} dK_s'^-, \quad \mathbb{P} - \text{p.s.}$$

■

**Lemme 4.8.** *Pour tout  $n \geq 0$  et  $t \in [0, T]$ , soit  $(\bar{Y}^n, \bar{Z}^n, \bar{K}^n)$  solution de l'EDSR à unique barrière associée à  $(-\|f\|e^{-\beta t} - ne^{-\beta t}(y - U_t)^+, L)$  avec  $\bar{Y}_T^n = 0, \sup_t(L_t^+) \in \mathbb{L}^2$  et  $U_t = c_{1,0}e^{-\beta t}$ . Alors,*

$$\sup_{t \leq T} n(\bar{Y}_t^n - U_t)^+ \leq \beta c_{1,0}e^{-\beta t}, \quad \mathbb{P}\text{-p.s.} \quad (29)$$

**Preuve.** C'est une adaptation de la preuve du lemme 41.4 de [13, p. 165]. Pour tout  $n, k \geq 0$ , soit  $(\bar{Y}^{n,k}, \bar{Z}^{n,k})$  solution de l'EDS ordinaire suivante:

$$\begin{aligned} \bar{Y}_t^{n,k} &= - \int_t^T e^{-\beta s} \|f\| ds - n \int_t^T e^{-\beta s} (\bar{Y}_s^{n,k} - U_s)^+ ds + k \int_t^T e^{-\beta s} (\bar{Y}_s^{n,k} - L_s)^- ds - \int_t^T \bar{Z}_s^{n,k} dW_s \\ \bar{Y}_T^{n,k} &= 0. \end{aligned}$$

Il est démontré dans [11, p. 719] que

$$\forall t \in [0, T], \quad \lim_{k \rightarrow \infty} k \int_t^T e^{-\beta s} (\bar{Y}_s^{n,k} - L_s)^- ds = \int_t^T e^{-\beta s} d\bar{K}_s^n, \quad \mathbb{P}\text{-p.s.}$$

et lorsque  $k$  tend vers l'infini, nous avons

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \bar{Y}_t^{n,k} = \bar{Y}_t^n, \quad \mathbb{P}\text{-p.s.}$$

Ensuite, on définit  $X_t^{n,k} = \bar{Y}_t^{n,k} - U_t$ , et par suite:

$$\begin{aligned} X_t^{n,k} &= -U_t - \int_t^T e^{-\beta s} \|f\| ds - n \int_t^T e^{-\beta s} (X_s^{n,k})^+ ds + k \int_t^T e^{-\beta s} (X_s^{n,k} - (L_s - U_s))^- ds - \int_t^T \bar{Z}_s^{n,k} dW_s \\ X_T^{n,k} &= -U_T. \end{aligned}$$

Appliquons la formule d'Itô entre  $t$  et  $T$  au produit  $X^{n,k} \times \exp \left( - \int_0^\cdot (\mu(u) + \nu(u)) du \right)$ , où  $\mu, \nu \in \mathcal{D}_n$ . Nous obtenons  $\forall \nu, \forall \mu$ :

$$\begin{aligned} X_t^{n,k} &= \mathbb{E} \left[ -U_T \exp \left( - \int_t^T (\mu(u) + \nu(u)) du \right) \right. \\ &+ \int_t^T \exp \left( - \int_t^s (\mu(u) + \nu(u)) du \right) (\dot{U}_s - e^{-\beta s} \|f\| + \mu(s)(L_s - U_s)) ds \\ &+ \int_t^T \exp \left( - \int_t^s (\mu(u) + \nu(u)) du \right) \mu(s)(X_s^{n,k} - (L_s - U_s)) ds \\ &\left. + \int_t^T \exp \left( - \int_t^s (\mu(u) + \nu(u)) du \right) \left( k e^{-\beta s} (X_s^{n,k} - (L_s - U_s))^- + \nu(s) X_s^{n,k} - n e^{-\beta s} (X_s^{n,k})^+ \right) ds \middle| \mathcal{F}_t \right]. \end{aligned}$$

L'égalité (6.13) de Cvitanic et Karatzas [6, p. 2042] montre que

$$\begin{aligned} X_t^{n,k} &\leq \operatorname{esssup}_{\mu \in \mathcal{D}_n} \operatorname{essinf}_{\nu \in \mathcal{D}_n} \mathbb{E} \left[ -U_T \exp \left( - \int_t^T (\mu(u) + \nu(u)) du \right) \right. \\ &\left. + \int_t^T \exp \left( - \int_t^s (\mu(u) + \nu(u)) du \right) (\dot{U}_s - e^{-\beta s} \|f\| + \mu(s)(L_s - U_s)) ds \middle| \mathcal{F}_t \right]. \end{aligned}$$

Du fait que  $L_t \leq U_t, U_T \geq 0$  et  $\mu \geq 0$ , il vient:

$$\begin{aligned} X_t^{n,k} &\leq \operatorname{esssup}_{\mu \in \mathcal{D}_n} \operatorname{essinf}_{\nu \in \mathcal{D}_n} \mathbb{E} \left[ \int_t^T \exp \left( - \int_t^s (\mu(u) + \nu(u)) du \right) |\dot{U}_s| ds \middle| \mathcal{F}_t \right] \\ &\leq \operatorname{esssup}_{\mu \in \mathcal{D}_n} \mathbb{E} \left[ \int_t^T \exp \left( - \int_t^s (\mu(u) + n) du \right) |\dot{U}_s| ds \middle| \mathcal{F}_t \right] \\ &\leq \mathbb{E} \left[ \int_t^T \exp \left( - n(s-t) \right) |\dot{U}_s| ds \middle| \mathcal{F}_t \right], \end{aligned}$$

les deux dernières inégalités sont obtenues du fait que  $e^{-\nu} \geq e^{-n}$  et  $e^{-\mu} \leq 1$ . Puisque  $U_t = c_{1,0} e^{-\beta t}$ , nous obtenons:

$$X_t^{n,k} \vee 0 \leq \frac{\beta c_{1,0}}{n} e^{-\beta t},$$

et pour tout  $t \in [0, T]$ , il vient:

$$n(\bar{Y}_t^n - U_t)^+ = \lim_{k \rightarrow \infty} n(X_t^{n,k} \vee 0) \leq \beta c_{1,0} e^{-\beta t}, \quad \mathbb{P}\text{-p.s.}$$

■

**Proposition 4.9.** *Pour tout  $n \geq 0$  et  $t \in [0, T]$ , soient  $(Y^n, Z^n, K^n)$  et  $(\rho, \theta, \Pi)$  solutions de l'EDSR réfléchie à unique barrière associées respectivement à  $(f e^{-\beta t} - n e^{-\beta t} (\bar{Y}_t^n - U_t)^+, L)$  et  $(-\|f\| e^{-\beta t} - \beta c_{1,0} e^{-\beta t}, L)$  avec  $Y_T^n = \rho_T = 0, \sup_t (L_t^+) \in \mathbb{L}^2, U_t = c_{1,0} e^{-\beta t}$  et  $\bar{Y}^n$  est défini dans le lemme 4.8. Alors,*

$$\forall t \in [0, T], \quad Y_t^n \geq \rho_t, \quad \text{et} \quad \int_0^t e^{-\beta s} dK_s^n \leq \int_0^t e^{-\beta s} d\Pi_s.$$

De plus, pour  $0 < \varepsilon < \frac{1}{6 \exp(\beta-1)}$ , il existe une constante  $\tilde{C}_\varepsilon$  telle que  $\forall T$  :

$$\mathbb{E} \left( \int_0^T e^{-\beta s} d\Pi_s \right)^2 \leq \tilde{C}_\varepsilon, \quad (30)$$

où

$$\tilde{C}_\varepsilon = \left( \frac{1}{3} - 2\varepsilon \exp \left( \frac{1}{\beta} \right) \right)^{-1} \left[ \left( 1 + 2 \exp \left( \frac{1}{\beta} \right) \right) \frac{1}{\beta} (\|f\| + \beta c_{1,0})^2 + \frac{1}{\varepsilon} \mathbb{E}[\sup_{s \geq 0} (L_s^+)^2] \right].$$

**Preuve.** Pour tout  $n \geq 0$  et  $t \in [0, T]$ , soient  $(Y^n, Z^n, K^n)$  et  $(\rho, \theta, \Pi)$  solutions de l'EDSR associées respectivement à  $(fe^{-\beta t} - ne^{-\beta t}(\bar{Y}_t^n - U_t)^+, L)$  et  $(-\|f\|e^{-\beta t} - \beta c_{1,0}e^{-\beta t}, L)$  avec  $Y_T^n = \rho_T = 0, \sup_t(L_t^+) \in \mathbb{L}^2, U_t = c_{1,0}e^{-\beta t}$  :

$$\begin{aligned} Y_t^n &= \int_t^T e^{-\beta s} f(s) ds - n \int_t^T e^{-\beta s} (\bar{Y}_s^n - U_s)^+ ds + \int_t^T e^{-\beta s} dK_s^n - \int_t^T Z_s^n dW_s \\ \rho_t &= - \int_t^T e^{-\beta s} \|f\| ds - \int_t^T \beta c_{1,0} e^{-\beta s} ds + \int_t^T e^{-\beta s} d\Pi_s - \int_t^T \theta_s dW_s. \end{aligned}$$

La majoration (29) du lemme 4.8 (avec  $\sup_t(L_t^+) \in \mathbb{L}^2$  et  $U_t = c_{1,0}e^{-\beta t}$ ) implique

$$-n(\bar{Y}_t^n - U_t)^+ \geq -\beta c_{1,0}e^{-\beta t}, \quad \mathbb{P}\text{-p.s.}$$

et naturellement  $e^{-\beta s} f(s) \geq -e^{-\beta s} \|f\|$ . Par conséquent,

$$e^{-\beta s} f(s) - ne^{-\beta s} (\bar{Y}_s^n - U_s)^+ \geq -e^{-\beta s} \|f\| - \beta c_{1,0}e^{-\beta s},$$

et en utilisant le corollaire de comparaison 4.5, il vient:

$$\forall t \in [0, T], \quad Y_t^n \geq \rho_t, \quad \text{et} \quad \int_0^t e^{-\beta s} dK_s^n \leq \int_0^t e^{-\beta s} d\Pi_s, \quad \mathbb{P}\text{-p.s.}$$

Cherchons maintenant une estimation de  $\mathbb{E} \left( \int_0^T e^{-\beta s} d\Pi_s \right)^2$ . Appliquons la formule d'Itô à  $\rho_t^2$  entre  $t$  et  $T$ :

$$\mathbb{E}(\rho_t)^2 + \mathbb{E} \int_t^T \theta_s^2 ds = 2\mathbb{E} \int_t^T e^{-\beta s} (-\|f\| - \beta c_{1,0}) \rho_s ds + 2\mathbb{E} \int_t^T e^{-\beta s} \rho_s d\Pi_s.$$

L'inégalité de Cauchy-Schwartz et l'égalité  $\int e^{-\beta s} (\rho_s - L_s) d\Pi_s = 0$  impliquent

$$\mathbb{E}(\rho_t)^2 + \mathbb{E} \int_t^T \theta_s^2 ds \leq \mathbb{E} \int_t^T e^{-\beta s} \rho_s^2 ds + \mathbb{E} \int_t^T e^{-\beta s} (\|f\| + \beta c_{1,0})^2 ds + 2\mathbb{E} \int_t^T e^{-\beta s} L_s d\Pi_s,$$

de plus, pour tout  $\varepsilon > 0$  :

$$\begin{aligned} 2 \int_t^T L_s e^{-\beta s} d\Pi_s^+ &\leq 2 \int_t^T L_s^+ e^{-\beta s} d\Pi_s^+ \\ &\leq 2 \sup_{s \geq t} L_s^+ \int_t^T e^{-\beta s} d\Pi_s^+ \leq \frac{1}{\varepsilon} \sup_{s \geq t} (L_s^+)^2 + \varepsilon \left( \int_t^T e^{-\beta s} d\Pi_s^+ \right)^2 \end{aligned}$$

(on utilise  $2ab \leq \frac{1}{\varepsilon}a^2 + \varepsilon b^2$ ). On applique le lemme de Gronwall avec  $\psi(t) = e^{-\beta t}$  et

$$\varphi(t) = \frac{1}{\beta}(\|f\| + \beta c_{1,0})^2 e^{-\beta t} + \frac{1}{\varepsilon} \mathbb{E}[\sup_{s \geq t} (L_s^+)^2] + \varepsilon \mathbb{E} \left[ \left( \int_t^T e^{-\beta s} d\Pi_s^+ \right)^2 \right].$$

Comme  $\varphi$  est décroissante (cf. appendice) il vient:

$$\mathbb{E}[\rho_t^2] \leq \varphi(t) \exp \left( \int_t^T e^{-\beta u} du \right) \leq \exp \left( \frac{1}{\beta} \right) \varphi(t). \quad (31)$$

On a aussi par conséquent, puisque  $\int_t^T |\theta_s|^2 ds \leq \rho_t^2 + \int_t^T |\theta_s|^2 ds$ , la même majoration

$$\mathbb{E} \left( \int_t^T |\theta_s|^2 ds \right) \leq \exp \left( \frac{1}{\beta} \right) \varphi(t). \quad (32)$$

Ensuite, nous avons:

$$\int_0^T e^{-\beta s} d\Pi_s = \rho_0 + \int_0^T e^{-\beta s} \|f\| ds + \int_0^T \beta c_{1,0} e^{-\beta s} ds + \int_0^T \theta_s dW_s.$$

Des inégalités (31) et (32), nous obtenons:

$$\frac{1}{3} \mathbb{E} \left( \int_0^T e^{-\beta s} d\Pi_s \right)^2 \leq \frac{1}{\beta} (\|f\| + \beta c_{1,0})^2 + 2 \exp \left( \frac{1}{\beta} \right) \varphi(0).$$

Si on retranche de  $\varphi(0)$  le terme  $\varepsilon \mathbb{E} \left[ \left( \int_0^T e^{-\beta s} d\Pi_s^+ \right)^2 \right]$  il vient

$$\left( \frac{1}{3} - 2\varepsilon \exp \left( \frac{1}{\beta} \right) \right) \mathbb{E} \left( \int_0^T e^{-\beta s} d\Pi_s \right)^2 \leq \left( 1 + 2 \exp \left( \frac{1}{\beta} \right) \right) \frac{1}{\beta} (\|f\| + \beta c_{1,0})^2 + \frac{1}{\varepsilon} \mathbb{E}[\sup_{s \geq 0} (L_s^+)^2], \quad (33)$$

avec  $\varepsilon$  est choisi assez petit vérifiant  $\varepsilon < \frac{1}{6 \exp(\beta^{-1})}$ . Enfin,  $\forall T$ :

$$\mathbb{E} \left( \int_0^T e^{-\beta s} d\Pi_s \right)^2 \leq \left( \frac{1}{3} - 2\varepsilon \exp \left( \frac{1}{\beta} \right) \right)^{-1} \left[ \left( 1 + 2 \exp \left( \frac{1}{\beta} \right) \right) \frac{1}{\beta} (\|f\| + \beta c_{1,0})^2 + \frac{1}{\varepsilon} \mathbb{E}[\sup_{s \geq 0} (L_s^+)^2] \right].$$

■

**Preuve du théorème 4.6.** En utilisant le théorème 3.2 de [13], on déduit l'existence pour tout  $n$  d'un quadruplet de processus qui vérifient  $Y^n \in \mathcal{C}^2([0, n])$ ,  $Z^n \in \mathbb{H}^2([0, n] \times \Omega)$  et  $\forall t \leq n$ :

$$(\mathcal{S}_{\mathcal{L}, \mathcal{U}}) \left\{ \begin{array}{l} Y_t^n = 0 \quad \forall t \geq n, \\ \forall t \leq n, L_t \leq Y_t^n \leq U_t, \\ Y_t^n = \int_t^n e^{-\beta s} f(s) ds + \int_t^n e^{-\beta s} dK_s^{n+} - \int_t^n e^{-\beta s} dK_s^{n-} - \int_t^n Z_s^n dW_s. \\ \\ \mathbb{E}(\int_0^t e^{-\beta s} dK_s^{n+})^2 < \infty \quad \mathbb{E}(\int_0^t e^{-\beta s} dK_s^{n-})^2 < \infty \text{ et} \\ \\ \int_0^t e^{-\beta s} (Y_s^n - L_s) dK_s^{n+} = \int_0^t e^{-\beta s} (U_s - Y_s^n) dK_s^{n-} = 0, \quad t \leq n \text{ } \mathbb{P}\text{-p.s.} \end{array} \right.$$

La proposition 4.7 implique que  $(Y^n)_n$  est une suite croissante de processus,  $(\int e^{-\beta s} dK^{n+})_n$  est une suite décroissante de processus et  $(\int e^{-\beta s} dK^{n-})_n$  est une suite croissante de processus. On note leurs limites presque sûres respectivement  $Y$ ,  $\int e^{-\beta s} dK_s^+$  et  $\int e^{-\beta s} dK_s^-$ . Ensuite,  $\forall k \geq n$  nous obtenons:

$$\begin{aligned} Y_t^{n+k} - Y_t^n &= \int_n^{n+k} e^{-\beta s} f(s) ds + \int_t^n e^{-\beta s} [dK_s^{(n+k)+} - dK_s^{n+}] + \int_n^{n+k} e^{-\beta s} dK_s^{(n+k)+} \\ &\quad - \int_t^n e^{-\beta s} [dK_s^{(n+k)-} - dK_s^{n-}] - \int_n^{n+k} e^{-\beta s} dK_s^{(n+k)-} \\ &\quad - \int_t^n [Z_s^{n+k} - Z_s^n] dW_s - \int_n^{n+k} Z_s^{n+k} dW_s. \end{aligned}$$

Appliquons la formule d'Itô à  $(Y_t^{n+k} - Y_t^n)^2$  entre  $t$  et  $n$ , nous obtenons:

$$\begin{aligned} (Y_t^{n+k} - Y_t^n)^2 + \int_t^n (Z_s^{n+k} - Z_s^n)^2 ds &= 2 \int_t^n e^{-\beta s} (Y_s^{n+k} - Y_s^n) (dK_s^{(n+k)+} - dK_s^{n+}) \\ &\quad - 2 \int_t^n e^{-\beta s} (Y_s^{n+k} - Y_s^n) (dK_s^{(n+k)-} - dK_s^{n-}) \\ &\quad - 2 \int_t^n (Y_s^{n+k} - Y_s^n) (Z_s^{n+k} - Z_s^n) dW_s + (Y_n^{n+k})^2. \end{aligned}$$

En utilisant la décroissance de la suite  $(\int e^{-\beta s} dK^{n+})_n$  et la croissance de la suite  $(\int e^{-\beta s} dK^{n-})_n$ , puis en passant à l'espérance, nous obtenons:

$$\mathbb{E}(Y_t^{n+k} - Y_t^n)^2 + \mathbb{E} \int_t^n (Z_s^{n+k} - Z_s^n)^2 ds \leq \mathbb{E}(Y_n^{n+k})^2.$$

Ensuite, en utilisant (19) pour  $L \leq 0 \leq U$  et tout  $n$  et tout  $k$

$$\exists D > 0 \quad \mathbb{E}(Y_s^{n+k})^2 \leq D e^{-\beta s}$$

avec  $D = \frac{1}{\beta} \|f\|^2 \exp\left(\frac{2C+1}{\beta}\right)$ , et alors on a simplement

$$\mathbb{E}(Y_t^{n+k} - Y_t^n)^2 + \mathbb{E} \int_t^n (Z_s^{n+k} - Z_s^n)^2 ds \leq \mathbb{E}(Y_n^{n+k})^2 \leq D e^{-\beta n} \rightarrow 0.$$

Par conséquent, les suites  $(Y^n)$  et  $(Z^n)$  sont deux suites de Cauchy qui convergent respectivement dans  $\mathbb{L}^2(\Omega)$  et  $\mathbb{L}^2([0, \infty[ \times \Omega, dt \otimes d\mathbb{P})$  vers deux processus  $Y, Z$  :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Y_t^n = Y_t \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} Z_t^n = Z_t.$$

On a donc  $Y_t \in \mathbb{L}^2$  pour tout  $t$  et  $Z \in \mathbb{L}^2([0, \infty[ \times \Omega, dt \otimes d\mathbb{P})$ .

ii/ Par limite presque sûre de la relation vérifiée pour tout  $n$  par le quadruplet  $(Y^n, Z^n, K^{n+}, K^{n-})$ , on obtient l'item ii/.

De plus, puisque pour tout  $n$   $L_t \leq Y_t^n \leq U_t$  à la limite on a également  $L_t \leq Y_t \leq U_t$



presque sûrement soit l'item *iii*/.

*iv*/ La majoration (30) de la proposition 4.9 implique

$$\forall t, \forall t \leq n, \mathbb{E} \left( \int_0^t e^{-\beta s} dK_s^{n+} \right)^2 \leq \mathbb{E} \left( \int_0^t e^{-\beta s} dK_s^{n,k} \right)^2 \leq \mathbb{E} \left( \int_0^t e^{-\beta s} d\Pi_s \right)^2 \leq \tilde{C}_\varepsilon$$

où  $\int_0^t e^{-\beta s} dK_s^{n+} = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^t e^{-\beta s} dK_s^{n,k}$  et

$$\tilde{C}_\varepsilon = \left( \frac{1}{3} - 2\varepsilon \exp \left( \frac{1}{\beta} \right) \right)^{-1} \left[ \left( 1 + 2 \exp \left( \frac{1}{\beta} \right) \right) \frac{1}{\beta} (\|f\| + \beta c_{1,0})^2 + \frac{1}{\varepsilon} \mathbb{E} [\sup_{s \geq 0} (L_s^+)^2] \right].$$

Quand  $n$  tend vers l'infini, il vient:

$$\forall t, \mathbb{E} \left( \int_0^t e^{-\beta s} dK_s^+ \right)^2 \leq \tilde{C}_\varepsilon.$$

Puis, on fait tendre  $t$  vers l'infini et on obtient:

$$\mathbb{E} \left( \int_0^\infty e^{-\beta s} dK_s^+ \right)^2 \leq \tilde{C}_\varepsilon,$$

et par suite  $\int_0^\infty e^{-\beta s} dK_s^+ \in \mathbb{L}^2$ . Ensuite, on tire de (26):

$$\int_0^\infty e^{-\beta s} dK_s^- = Y_t - Y_0 + \int_0^\infty e^{-\beta s} f(s) ds + \int_0^\infty e^{-\beta s} dK_s^+ - \int_0^\infty Z_s dW_s,$$

qui est la somme de cinq termes de  $\mathbb{L}^2$ , et par conséquent  $\int_0^\infty e^{-\beta s} dK_s^-$  est aussi de carré intégrable.

Pour achever la preuve de l'item *iv*/, pour tout  $n$  on a l'identité presque sûre

$$\int_0^t e^{-\beta s} (Y_s^n - L_s) dK_s^{n+} = \int_0^t e^{-\beta s} (U_s - Y_s^n) dK_s^{n-} = 0, \quad t \leq n.$$

La monotonie des suites de mesures  $K^{n+}$  et  $K^{n-}$  montre que  $\lim_n p.s. \int_0^t e^{-\beta s} L_s dK_s^{n+} = \int_0^t e^{-\beta s} L_s dK_s^+$  et  $\lim_n p.s. \int_0^t e^{-\beta s} U_s dK_s^{n-} = \int_0^t e^{-\beta s} U_s dK_s^-$ . Par ailleurs développons (en rappelant que par définition  $Y_s^n = 0$  pour tout  $s \geq n$ ) la différence suivante:

$$\begin{aligned} & \int_0^t e^{-\beta s} Y_s^n dK_s^{n+} - \int_0^t e^{-\beta s} Y_s dK_s^+ = \\ & \int_0^t e^{-\beta s} Y_s^n (dK_s^{n+} - dK_s^+) + \int_0^t e^{-\beta s} (Y_s^n - Y_s) dK_s^+. \end{aligned}$$

Le deuxième terme tend presque sûrement vers 0 par convergence de Lebesgue monotone. Pour le premier, notons que  $L_s \leq Y_s^n \leq Y_s$ , il converge vers 0 par convergence de Lebesgue majorée. De façon similaire, développons la différence suivante:

$$\begin{aligned} & \int_0^t e^{-\beta s} Y_s^n dK_s^{n-} - \int_0^t e^{-\beta s} Y_s dK_s^- = \\ & \int_0^t e^{-\beta s} Y_s^n (dK_s^{n-} - dK_s^-) + \int_0^t e^{-\beta s} (Y_s^n - Y_s) dK_s^-. \end{aligned}$$

Le deuxième terme tend presque sûrement vers 0 par convergence de Lebesgue monotone. Pour le premier, notons que  $L_s \leq Y_s^n \leq Y_s \leq U_s$ , il converge vers 0 par convergence de Lebesgue majorée. Par suite,

$$\int_0^t e^{-\beta s} (Y_s - L_s) dK_s^+ = \int_0^t e^{-\beta s} (U_s - Y_s) dK_s^- = 0.$$

Suite de l'item *i*/: De la relation (26) on tire:

$$Y_t = Y_0 - \int_0^t e^{-\beta s} f(s) ds + \int_0^t e^{-\beta s} dK_s^+ - \int_0^t e^{-\beta s} dK_s^- + \int_0^t Z_s dW_s.$$

On a donc puisqu'ici  $f$  ne dépend pas de  $y$  et dans ce cas est bornée:

$$\sup_t |Y_t| \leq |Y_0| + \frac{\|f\|}{\beta} + \int_0^\infty e^{-\beta s} dK_s^+ + \int_0^\infty e^{-\beta s} dK_s^- + \sup_t \left| \int_0^\infty Z_s dW_s \right|,$$

c'est à dire une majoration par la somme de cinq termes dans  $\mathbb{L}^2$  :  $\mathbb{E}[\sup_t |Y_t|^2] < \infty$  et  $Y \in \mathcal{C}^2$ . ■

## 5 Existence de $(Y^1, Y^2)$

En utilisant le théorème 4.6 avec

$$f(s) = f(0, X_s^0) - f(1, X_s^1), \quad L_t = -c_{0,1}e^{-\beta t} \leq 0 \leq U_t = e^{-\beta t}c_{1,0},$$

il existe un quadruplet de processus mesurables  $(Y, Z, K^+, K^-)$  tel que:

$$(S) \left\{ \begin{array}{l} Y \in \mathcal{C}^2, Z \in \mathbb{H}^2. \\ Y_t = \int_t^{+\infty} e^{-\beta s} (f(0, X_s^0) - f(1, X_s^1)) ds + \int_t^{+\infty} e^{-\beta s} dK_s^+ - \int_t^{+\infty} e^{-\beta s} dK_s^- - \int_t^{+\infty} Z_s dW_s \\ -c_{0,1}e^{-\beta t} \leq Y_t \leq e^{-\beta t}c_{1,0} \\ \int_0^{+\infty} e^{-\beta s} dK_s^\pm \in \mathbb{L}^2 \text{ et } e^{-\beta t}(Y_t + e^{-\beta t}c_{0,1})dK_t^+ = e^{-\beta t}(c_{1,0}e^{-\beta t} - Y_t)dK_t^- = 0. \end{array} \right.$$

Nous pouvons donc prouver notre résultat principal: l'existence des processus  $(Y^1, Y^2)$  introduits dans la proposition 3.4. On se réfère au théorème 3.2 [15, p. 186].

**Théorème 5.1.** *Il existe un couple de processus continus  $(Y_t^1, Y_t^2)_{t \geq 0}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  qui satisfont (5) et (6):*

$$\begin{aligned} Y_t^1 &= \operatorname{essup}_{\theta \in \mathcal{T}_t} \mathbb{E} \left[ \int_t^\theta e^{-\beta s} f(0, X_s^0) ds - e^{-\beta \theta} c_{0,1} + Y_\theta^2 | \mathcal{F}_t \right], \quad Y_\infty^1 = 0 \\ Y_t^2 &= \operatorname{essup}_{\theta \in \mathcal{T}_t} \mathbb{E} \left[ \int_t^\theta e^{-\beta s} f(1, X_s^1) ds - e^{-\beta \theta} c_{1,0} + Y_\theta^1 | \mathcal{F}_t \right], \quad Y_\infty^2 = 0. \end{aligned}$$

**Preuve.** On applique le théorème 4.6 avec

$$f(s) = f(0, X_s^0) - f(1, X_s^1), \quad L_t = -c_{0,1}e^{-\beta t} \leq 0 \leq U_t = e^{-\beta t}c_{1,0},$$

Puisque  $\int_t^{+\infty} e^{-\beta s} dK_s^\pm$  sont intégrables et  $f$  bornée on peut définir les processus

$$\begin{aligned} Y_t^1 &= \mathbb{E} \left[ \int_t^\infty e^{-\beta s} f(0, X_s^0) ds + \int_t^{+\infty} e^{-\beta s} dK_s^+ | \mathcal{F}_t \right] \\ Y_t^2 &= \mathbb{E} \left[ \int_t^\infty e^{-\beta s} f(1, X_s^1) ds + \int_t^{+\infty} e^{-\beta s} dK_s^- | \mathcal{F}_t \right]. \end{aligned}$$

Par suite,  $Y_t = Y_t^1 - Y_t^2$ ,  $t \geq 0$  et de l'inégalité  $-c_{0,1}e^{-\beta t} \leq Y_t \leq e^{-\beta t}c_{1,0}$ , on obtient  $Y_\infty = 0$ .

Montrons maintenant que  $\mathbb{E}[\sup_{t \geq 0} |Y_t^i|^2] < \infty$ ,  $i = 0, 1$ . En passant au carré et à l'espérance des précédentes égalités, en utilisant la bornitude de la fonction  $f$ , et le fait que  $\int_0^t e^{-\beta s} dK_s^+$  est positive, nous obtenons pour tout  $t$ :

$$Y_t^1 \leq \frac{1}{\beta} \|f\| + \mathbb{E} \left[ \left( \int_0^{+\infty} e^{-\beta s} dK_s^+ \right) / \mathcal{F}_t \right].$$

L'inégalité de Burkholder-Davis-Gundy [16, p. 166] appliquée à la martingale de carré intégrable  $\mathbb{E}[(\int_0^{+\infty} e^{-\beta s} dK_s^+) / \mathcal{F}_t]$  permet de conclure que  $\mathbb{E}[\sup_{t \geq 0} |Y_t^1|^2] < \infty$ . Nous procédons de la même façon pour démontrer  $\mathbb{E}[\sup_{t \geq 0} |Y_t^2|^2] < \infty$ .

Ensuite, d'après le théorème de représentation des martingales, il existe un processus prévisible adapté  $Z^1$  tel que pour tout  $t$ :

$$\int_0^t Z_s^1 dW_s = \int_0^t e^{-\beta s} f(0, X_s^0) ds + \int_0^t e^{-\beta s} dK_s^+ + Y_t^1 - \mathbb{E} \left[ \int_0^\infty e^{-\beta s} f(0, X_s^0) ds + \int_0^\infty e^{-\beta s} dK_s^+ \right].$$

En utilisant la troisième inégalité du système (S), nous avons  $Y_t \geq -c_{0,1}e^{-\beta t}$ , et en remplaçant  $Y_t$  par  $Y_t^1 - Y_t^2$ , nous obtenons  $Y_t^1 \geq -c_{0,1}e^{-\beta t} + Y_t^2$ .

De même, la quatrième égalité du système (S), c'est à dire  $\int_0^\cdot e^{-\beta t}(Y_t + c_{0,1}e^{-\beta t})dK_t^+ = 0$ , en remplaçant  $Y_t$  par  $Y_t^1 - Y_t^2$  montre

$$\forall T, \int_0^T (Y_t^1 - Y_t^2 + c_{0,1}e^{-\beta t})e^{-\beta t}dK_t^+ = 0.$$

Par suite, le triplet  $(Y^1, Z^1, K^+)$  satisfait:

$$\begin{cases} -dY_t^1 = e^{-\beta t}f(0, X_t^0)dt + e^{-\beta t}dK_t^+ - Z_t^1dW_t \\ Y_t^1 \geq -c_{0,1}e^{-\beta t} + Y_t^2 \text{ et } e^{-\beta t}(Y_t^1 - Y_t^2 + e^{-\beta t}c_{0,1})dK_t^+ = 0. \end{cases}$$

Ensuite, on utilise le théorème 4.4 item  $v/$  avec  $L_t = -c_{0,1}e^{-\beta t} + Y_t^2$ . Du fait que  $\mathbb{E}[\sup_{t \geq 0} |Y_t^2|^2] < \infty$ , l'hypothèse  $\mathbb{E}[\sup_{t \geq 0} (L_t^+)^2] < \infty$  est vérifiée et on a :

$$Y_t^1 = \operatorname{essup}_{\theta \in \mathcal{T}_t} \mathbb{E} \left[ \int_t^\theta e^{-\beta s} f(0, X_s^0) ds - c_{0,1}e^{-\beta \theta} + Y_\theta^2 | \mathcal{F}_t \right], \quad t \geq 0.$$

D'une manière similaire, en utilisant la troisième inégalité du système (S), nous avons  $Y_t \leq c_{1,0}e^{-\beta t}$ , et en remplaçant  $Y_t$  par  $Y_t^1 - Y_t^2$ , nous obtenons  $Y_t^2 \geq -c_{1,0}e^{-\beta t} + Y_t^1$ . Par suite, le triplet  $(Y^2, Z^1, K^-)$  satisfait:

$$\begin{cases} -dY_t^2 = e^{-\beta t}f(1, X_t^1)dt + e^{-\beta t}dK_t^- - Z_t^1dW_t \\ Y_t^2 \geq -c_{1,0}e^{-\beta t} + Y_t^1 \text{ et } e^{-\beta t}(c_{1,0}e^{-\beta t} - Y_t^1 + Y_t^2)dK_t^- = 0. \end{cases}$$

Ensuite, on utilise le théorème 4.4 item  $v/$  avec  $L_t = -c_{1,0}e^{-\beta t} + Y_t^1$ . Du fait que  $\mathbb{E}[\sup_{t \geq 0} |Y_t^1|^2] < \infty$ , l'hypothèse  $\mathbb{E}[\sup_{t \geq 0} (L_t^+)^2] < \infty$  est vérifiée et on a :

$$Y_t^2 = \operatorname{essup}_{\theta \in \mathcal{T}_t} \mathbb{E} \left[ \int_t^\theta e^{-\beta s} f(1, X_s^1) ds - c_{1,0}e^{-\beta \theta} + Y_\theta^1 | \mathcal{F}_t \right], \quad t \geq 0.$$

D'où l'existence du couple  $(Y^1, Y^2)$ . ■

## 6 Appendice

*Lemme de Gronwall:* Si  $y$  et  $\psi$  sont deux fonctions continues qui vérifient:

$$y(t) \leq \varphi(t) + \int_t^T \psi(s)y(s)ds,$$

alors

$$y(t) \leq \varphi(t) + \int_t^T \varphi(s)\psi(s) \exp \left( \int_t^s \psi(u)du \right) ds.$$

Si de plus la fonction  $\varphi$  est décroissante, alors:

$$y(t) \leq \varphi(t) \exp \left( \int_t^T \psi(u)du \right).$$

## References

- [1] **A. Bensoussan et J.L. Lions:** *Contrôle Impulsionnel et Inéquations quasi-variationnelles*. Dunod, Paris, 1982.
- [2] **B. Bouchard et J.F. Chassagneux:** *Discrete-Time Approximation for Continuously and Discretely Reflected BSDEs*. Stochastic Processes and their Applications, Volume 118, Issue 12, p. 2269-2293, 2008.
- [3] **B. Bouchard et N. Touzi,** *Discrete-Time Approximation and Monte-Carlo Simulation of Backward Stochastic Differential Equations*. Stochastic Processes and their Applications, 111 (2), p. 175-206, 2004.
- [4] **B. Bouchard et R. Elie,** *Discrete-time approximation of decoupled forward-backward SDE with jumps*. Stoch. Proc. and their Appl., 118, p. 53-75, 2008.
- [5] **J.F. Chassagneux, R. Elie et I. Kharroubi:** *Discrete-time Approximation of Multidimensional BSDEs with oblique reflections*, à paraître dans Annals of Applied Probability, 2012.
- [6] **J. Cvitanic et I. Karatzas:** *Backward Stochastic Differential Equations with Reflection and Dynkin Games*. The Annals of Probability, Vol. 24, No. 4, p. 2024-2056, 1996.
- [7] **C. Dellacherie et P.A. Meyer:** *Probabilités et Potentiel II*. Hermann, 1980.
- [8] **B. Djehiche, S. Hamadène et A. Popier:** *A Finite Horizon Optimal Multiple Switching Problem*. SIAM J. Control Optim. Volume 48, Issue 4, p. 2751-2770, 2009.
- [9] **F. Guilbaud, M. Mnif et H. Pham:** *Numerical Methods for an Optimal Order Execution Problem*. HAL: hal-00489069, version 1. 2010.
- [10] **N. El Karoui:** *Les Aspects Probabilistes du Contrôle Stochastique*. Lecture notes in mathematics 876. Springer-Verlag, Berlin, 1981.
- [11] **N. El Karoui, C. Kapoudjian, E. Pardoux, S. Peng et M.C. Quenez:** *Reflected Solutions of Backward SDE's, and Related Obstacle Problems for SDE's*. The Annals of Probability, Vol. 25, No. 2, p. 702-737, 1997.
- [12] **N. El Karoui, S. Peng et M.C. Quenez:** *Backward Stochastic Differential Equations in Finance*. Mathematical Finance 7, p. 1-71, 1997.
- [13] **S. Hamadène, J.P. Lepeltier et A. Matoussi:** *Double Barrier Reflected Backward SDE's with Continuous Coefficient*. Pitman Research Notes in Mathematics Series, Vol. 364. p. 115-128, 1997.

- [14] **I. Hdhiri et M.Karouf:** *Risk Sensitive Impulse Control of Non-Markovian Processes*. 2010.
- [15] **M. Jeanblanc et S. Hamadène:** *On the Starting and Stopping Problem: Application in Reversible Investments*. Mathematics of Operations Research, vol.32, No.1, p.182-192. 2007.
- [16] **I. Karatzas et S.E. Shreve:** *Brownian Motion and Stochastic Calculus*. Springer, Second Edition, 1991.
- [17] **J.P. Lepeltier et J. San Martin:** *Backward SDE's with continuous coefficients*. Statistics and Probability Letters, 1995.
- [18] **J.P. Lepeltier et J. San Martin:** *Backward SDE's with two barriers and continuous coefficient: An existence result*. Journal of applied probability, Vol. 41, No. 1, p. 162-175, 2004.
- [19] **A. Eyraud-Loisel:** *EDSR et EDPR avec grossissement de filtration, problèmes d'asymétrie d'information et de couverture sur les marchés financiers*. Thèse, 2005.
- [20] **E. Pardoux et S.G. Peng:** *Adapted Solution of a Backward Stochastic Differential Equation*. Elsevier Science Publishers B.V. 1990.
- [21] **E. Pardoux et S.G. Peng:** *Backward Stochastic Differential Equations and Quasilinear Parabolic Partial Differential Equations*. Stochastic Differential Equations and their Applications (B. Rozovskii and R. Sowers, eds.), Lect. Not. Cont. Inf. Sci., vol.176, Springer, p. 200-217, 1992.
- [22] **S.G. Peng:** *Backward Stochastic Differential Equations and Applications to Optimal Control*. Appl Math Optim 27: p. 125-144, 1993.
- [23] **Y. Saisho:** *Stochastic differential equations for multidimensional domains with reflecting boundary*. Proba. Theory Related Fields 74, p.455-477, 1987.
- [24] **V. L. Vath et M. Mnif:** *Numerical Approximation for an Impulse Control Problem Arising in Portfolio Selection under Liquidity Risk*. HAL: hal-00135815, version 1. 2007.
- [25] **J. Yong et J. Ma:** *Forward-Backward Stochastic Differential Equations and Their Applications*. Lecture Notes in Mathematics 1702. Springer, Berlin, 1999.